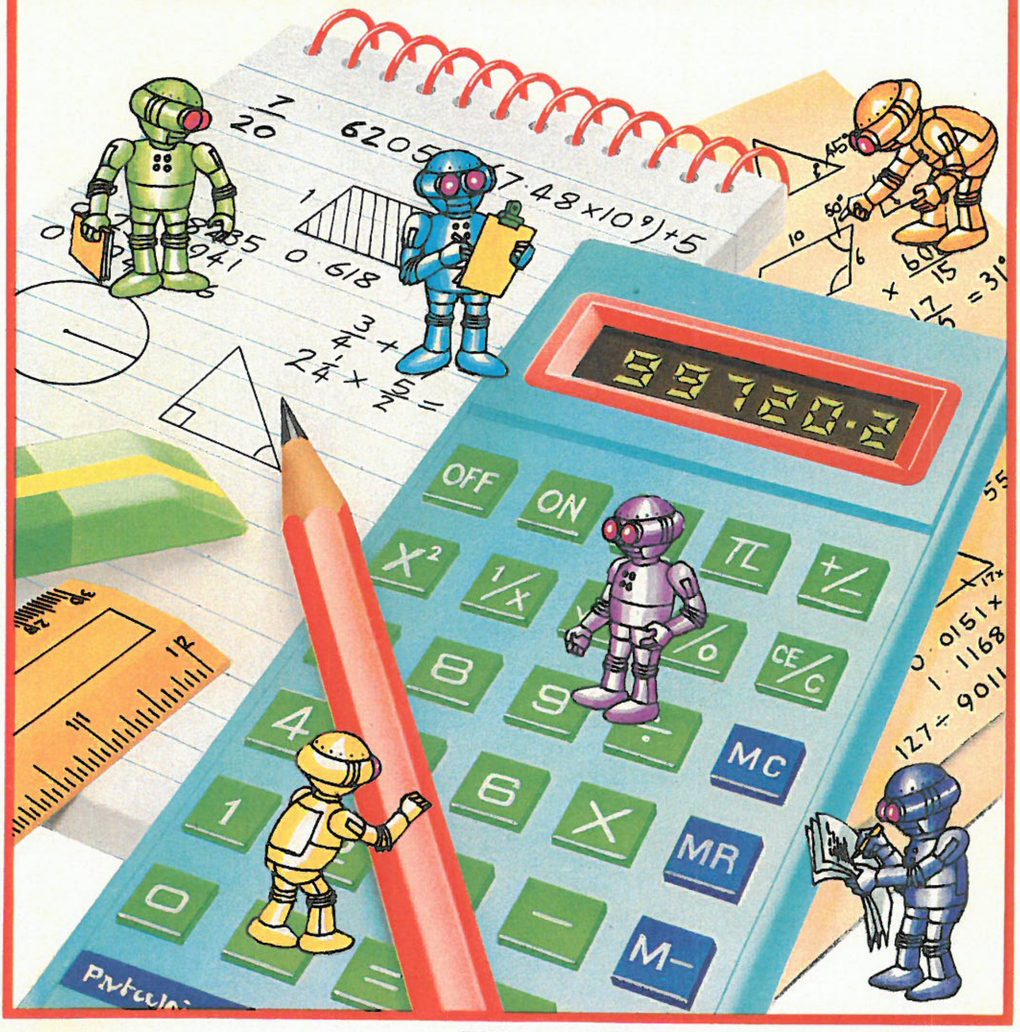
Colección Electrónica

CALCULOS Y HABILIDADES

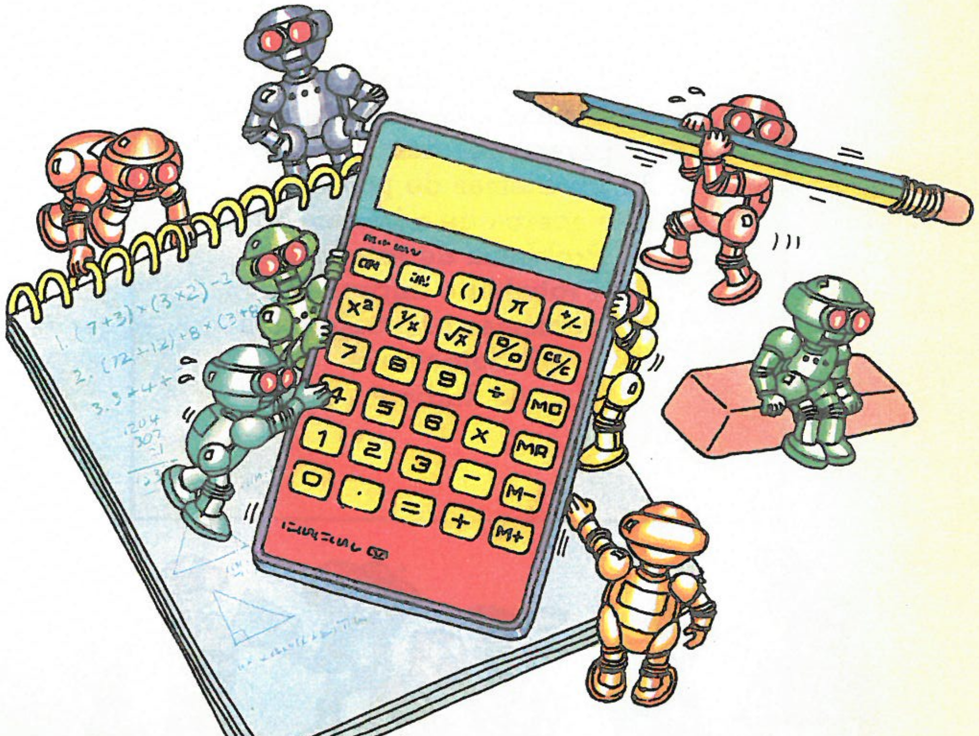
con calculadoras



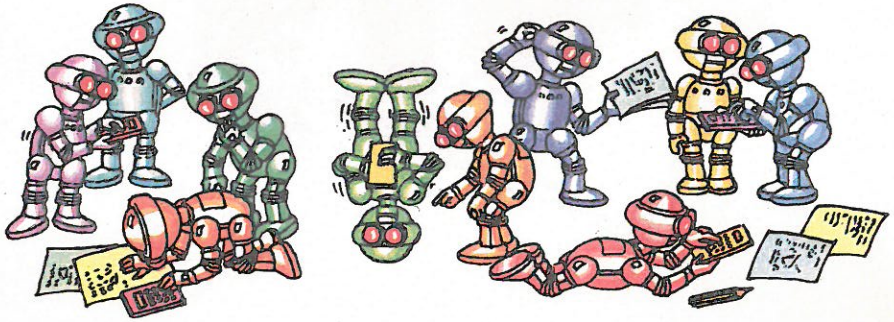
Ediciones
Plesa
SM

CALCULOS Y HABILIDADES con calculadoras

Nigel Langdon



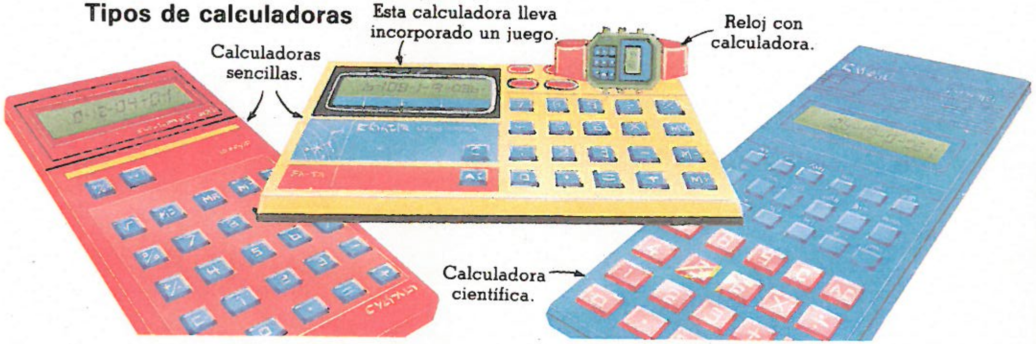
Contenido



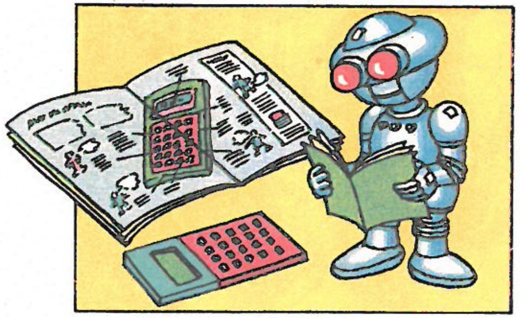
Acerca de este libro

Este es un libro sobre problemas y juegos con números para ayudarte a practicar con la calculadora. Empieza con juegos y trucos sencillos, que mejorarán tu rapidez y precisión en el uso de la calculadora. Luego aparecen problemas más complicados, que implican el uso de potencias, raíces, estadísticas y trigonometría. Son problemas para hacer en una calculadora científica. A lo largo del libro encontrarás explicaciones sencillas de las matemáticas que necesitas para los cálculos. En las páginas 42 a 47, al final del libro, se dan todas las soluciones.

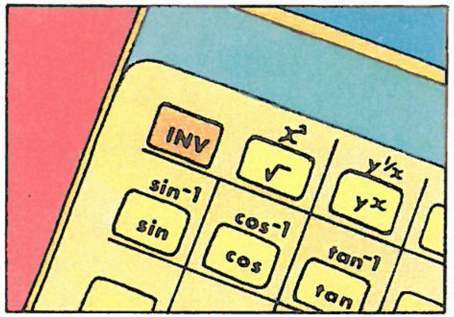
Tipos de calculadoras



La mayor parte de la gente tiene calculadoras sencillas con las teclas para operaciones elementales, como las de suma y el cálculo de porcentajes. Las calculadoras científicas tienen una gran cantidad de teclas, pero la mayor parte de estas teclas hacen las operaciones más fácilmente, aunque también las puedes hacer con una calculadora sencilla, como el cálculo de potencias o las operaciones con corchetes.



Las operaciones que puede realizar una calculadora (suma, resta, etcétera) se denominan generalmente funciones. Los símbolos de las funciones varían de una calculadora a otra. Comprueba, en el manual de instrucciones que viene con la calculadora, si los símbolos en tu calculadora son distintos a los de este libro.

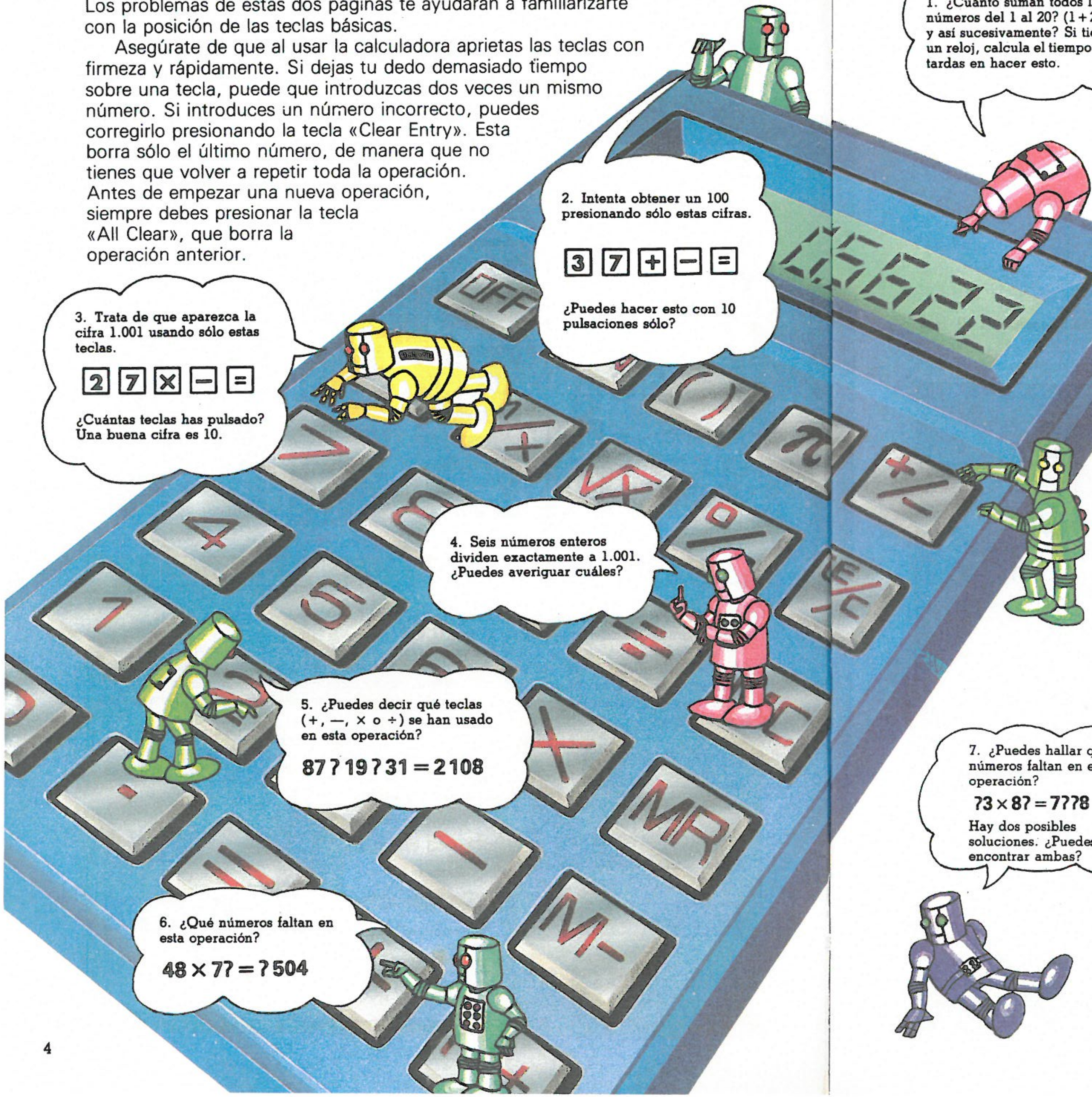


En las calculadoras científicas las funciones opuestas o «inversas», como la de hallar el cuadrado o la raíz, están situadas en la misma tecla. Para escoger la segunda función debes de apretar la tecla marcada con INV (abreviatura de inversa). Las letras de las funciones tienen un código de colores, por lo que puedes saber cuál es la seleccionada con la tecla INV.

Problemas con el teclado

Los problemas de estas dos páginas te ayudarán a familiarizarte con la posición de las teclas básicas.

Asegúrate de que al usar la calculadora aprietas las teclas con firmeza y rápidamente. Si dejas tu dedo demasiado tiempo sobre una tecla, puede que introduzcas dos veces un mismo número. Si introduces un número incorrecto, puedes corregirlo presionando la tecla «Clear Entry». Esta borra sólo el último número, de manera que no tienes que volver a repetir toda la operación. Antes de empezar una nueva operación, siempre debes presionar la tecla «All Clear», que borra la operación anterior.



1. ¿Cuánto suman todos los números del 1 al 20? (1 + 2 + 3 y así sucesivamente? Si tienes un reloj, calcula el tiempo que tardas en hacer esto.

2. Intenta obtener un 100 presionando sólo estas cifras.

$\boxed{3}\ \boxed{7}\ \boxed{+}\ \boxed{-}\ \boxed{=}$

¿Puedes hacer esto con 10 pulsaciones sólo?

3. Trata de que aparezca la cifra 1.001 usando sólo estas teclas.

$\boxed{2}\ \boxed{7}\ \boxed{\times}\ \boxed{-}\ \boxed{=}$

¿Cuántas teclas has pulsado? Una buena cifra es 10.

4. Seis números enteros dividen exactamente a 1.001. ¿Puedes averiguar cuáles?

5. ¿Puedes decir qué teclas (+, —, × o ÷) se han usado en esta operación?

87 ? 19 ? 31 = 2 108

6. ¿Qué números faltan en esta operación?

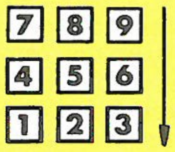
48 × 7? = ? 504

7. ¿Puedes hallar qué números faltan en esta operación?

?3 × 8? = 7??8

Hay dos posibles soluciones. ¿Puedes encontrar ambas?

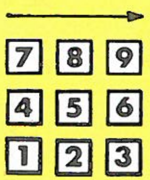
Operaciones con resta

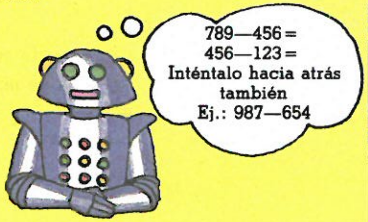


963-852 =

852-741 =

Trata de leer los números del teclado hacia abajo y restando una columna de la que está al lado, como se muestra aquí. ¿Qué soluciones obtienes?

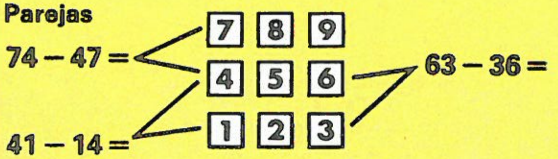




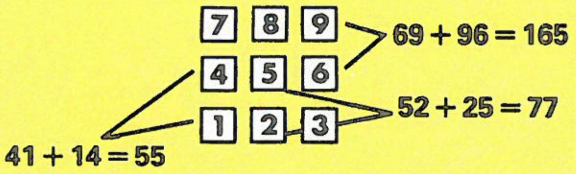
789—456 =
456—123 =
Inténtalo hacia atrás también
Ej.: 987—654

Ahora lee los números hacia la izquierda y resta la fila siguiente. ¿Por qué crees que la cifra es siempre la misma?

Parejas



Elige un número del teclado y el que está encima o debajo de él. Combínalos de forma que constituyan dos números, entonces resta al mayor el menor. Hazlo varias veces (con diferentes números) y observa qué ocurre.



Si sumas los dos números la respuesta es siempre un múltiplo de… ¿qué número?

Vecinos

¿Cuántos números del 1 al 20 puedes formar usando sólo dos números de vecinos y una de las teclas de operaciones como se muestra abajo? No puedes usar teclas que sean vecinas en diagonal.

$\boxed{5} - \boxed{4} = 1 \qquad \boxed{6} \div \boxed{3} = 2 \qquad \boxed{7} - \boxed{4} = 3$

¿Qué cinco números no pueden formarse? Si usas teclas que sean vecinas en diagonal ¿puedes hacer más números? ¿Qué números continúan sin poderse formar?

Más acerca de los números

Nuestro sistema de números se llama decimal o de «base 10», porque se usan 10 dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Con estos números podemos formar cualquier cifra, incluso fracciones (esto es lo que hace posible las calculadoras de bolsillo). Para números mayores de 9 usamos la combinación de dos o más dígitos, con lo cual es posible formar cualquier cantidad, ya que podemos variar el valor de un dígito cambiando su posición. Observa los números de abajo.

3 5 7 6 1 8

En este número hay

3	centenas de miles
+5	decenas de miles
+7	miles
+6	centenas
+1	decenas
+8	unidades

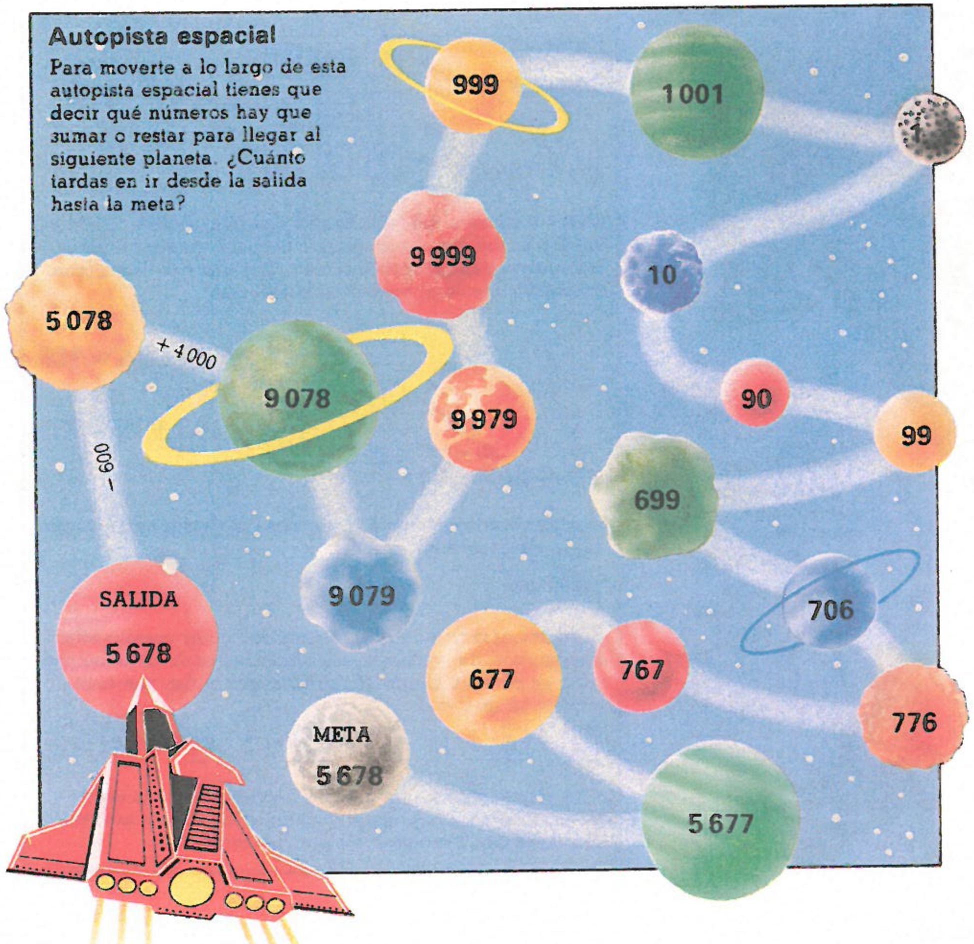
4 5 9

En este número hay

4	centenas
+5	decenas
+9	unidades

En el número de la izquierda la cifra 5 representa 50.000 y en la derecha 5 representa 50. Haz el siguiente problema en la calculadora.

Autopista espacial



Para moverte a lo largo de esta autopista espacial tienes que decir qué números hay que sumar o restar para llegar al siguiente planeta. ¿Cuánto tardas en ir desde la salida hasta la meta?

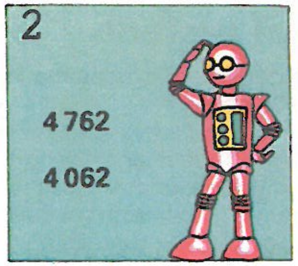
1 ¿Cuál es el valor?

36 417

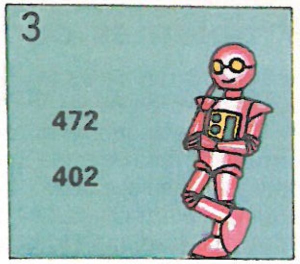
29 149

42 613

¿Qué valor tiene el 4 en cada una de estas cifras?

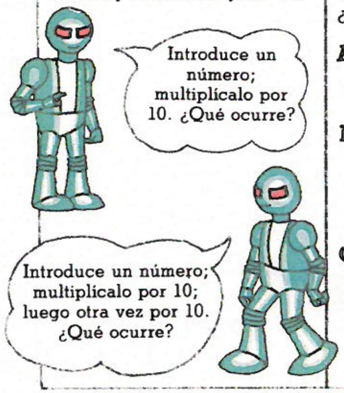


¿Cuál es la diferencia entre estos dos números?



¿Cuál es la diferencia entre estos dos números?

Multiplicando por 10



Operaciones equivalentes

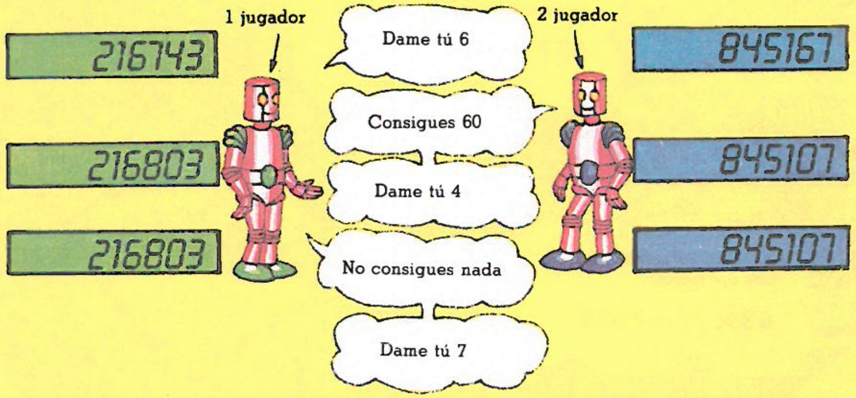
¿Qué operaciones dan el mismo resultado?

- **A** × 1000
- **B** Multiplica por cien
- **C** Multiplica por mil
- **D** × 10 000
- **E** × 10 → × 10
- **F** Multiplica por diez
- **G** × 10 → × 10 → × 10 → × 10
- **H** × 10
- **I** × 10 → × 10 → × 10
- **J** × 100

Juego de dar y recibir

Aquí hay un juego para que realices con un amigo. El objetivo es conseguir en tu calculadora un número mayor a un millón (1.000.000).

Para jugar, cada persona introduce en su calculadora un número de seis cifras (cada cifra debe ser distinta); luego, por turno, dirán un número del 1 al 9. Si el contrario tiene dicho número observará la posición del número en su cifra y contestará que sumes dicho número seguido de tantos ceros como números haya a la derecha de la cifra, al tiempo que él se lo resta.



Descubrimiento de fallos

Es muy fácil presionar una tecla equivocada sin darse cuenta, por lo que debes ser capaz de darte cuenta de cuándo la respuesta no es correcta. La mejor forma de detectar errores es tener en tu cabeza una idea aproximada de cuál debe ser la respuesta. Los problemas de estas dos páginas te ayudarán a adquirir práctica para calcular la respuesta que esperas.

¿Cuál es el más cercano?

Sin hacer cálculos, ¿cuál crees que es la solución a las operaciones siguientes? Escoge A, B o C.

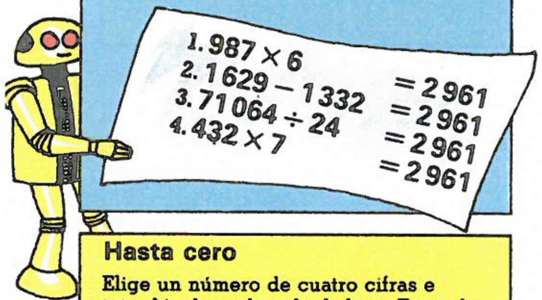
1. 97 × 49
A. Cerca de 5.000
B. Cerca de 2.000
C. Cerca de 150

2. 36 912 ÷ 12
A. Cerca de 30
B. Cerca de 300
C. Cerca de 3.000

3. 11 545 − 8 317 + 239 − 1 798
A. Entre 10.000 y 11.000
B. Entre 3.000 y 4.000
C. Entre 1.000 y 2.000

Busca los errores

La respuesta 2.961 es correcta para una sola de estas operaciones. ¿Puedes averiguar qué equivocaciones se han cometido en las otras?



1. 987 × 6 = 2961
2. 1629 − 1332 = 2961
3. 71064 ÷ 24 = 2961
4. 432 × 7 = 2961

Hasta cero

Elige un número de cuatro cifras e introdúcelo en la calculadora. Trata de reducir el número a 0 en cuatro pasos. En cada paso sólo puedes dividir, multiplicar, sumar o restar un número de dos cifras.

Ejemplo → 5327
− 2 7 = 5300
÷ 5 3 = 100
− 5 0 = 50
− 5 0 = 0

¿Crees que cualquier número de cuatro cifras puede reducirse a 0 en cuatro etapas?

Carrera hasta el 1

Este es un juego para uno o dos jugadores. Elige un número para empezar (por ejemplo, 28) e introdúcelo en la calculadora. Luego escoge un número clave (por ejemplo, 3). Usando cualquier función, pero sólo una, averigua cuántos pasos haces hasta llegar hasta 1.

Ejemplo → 28
+ 3 = 31
× 3 = 93
+ 3 = 96
+ 3 = 99
÷ 3 3 = 3
÷ 3 = 1

En este ejemplo se ha hecho en seis pasos. ¿Puedes hacerlo en menos con los mismos números? (Puede hacerse en tres pasos).

Número inicial →	55	40	27
Número clave →	6	5	7

Repite el problema con estos números. Si puedes llegar a 1 en ocho o nueve pasos está bien, en seis o siete está muy bien y si lo haces en cinco o menos es excelente.

Números consecutivos

1. El número 66 puede conseguirse sumando cuatro números consecutivos*. ¿Cuáles son?

2. El número 1.190 es el resultado de multiplicar dos números consecutivos. ¿Cuáles son?

3. El número 504 es el resultado de multiplicar tres números consecutivos. ¿Sabes cuáles?

*Los números consecutivos son números que se siguen; por ejemplo, 8, 9 y 10.

Cuatro en línea

Este juego es para dos o más jugadores. Por turno se deben elegir dos números de la tabla verde y multiplicarlos. Luego cubre la respuesta con una moneda o un trozo de papel en el tablero de abajo. El ganador es el primero en cubrir cuatro números en una línea.

Inversión

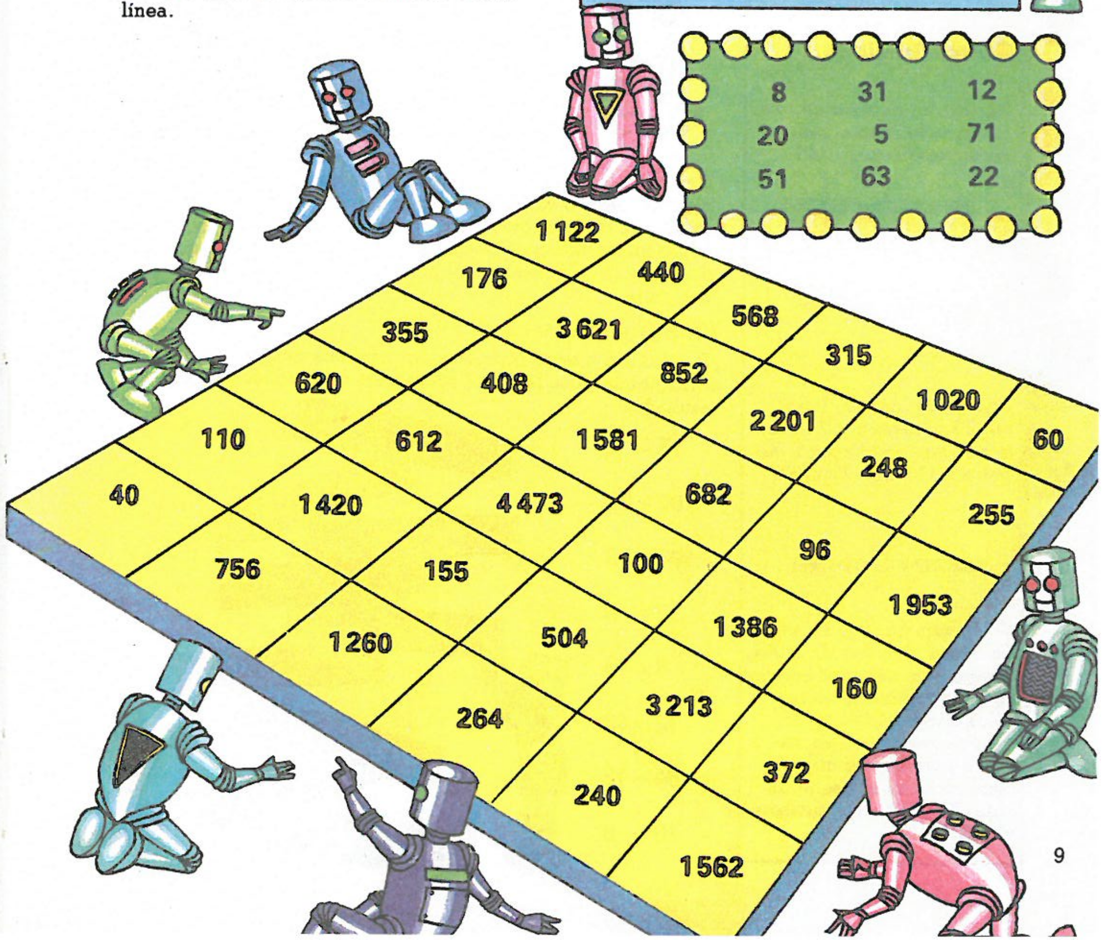
Introduce dos dígitos en la calculadora, el mayor primero. → 62

Repítelos de manera que se forme un número de seis cifras. → 626262

Necesitas restar 363636

Luego calcula el número que necesitas restarle para obtener un número con las mismas cifras, pero al revés. → 262626

Haz el problema con distintos pares de números. ¿Qué observas sobre los números que tienes que restar?



8	31	12
20	5	71
51	63	22

1 122	176	355	620	110	40
440	3 621	408	612	1420	756
568	852	1581	4 473	155	1260
315	2 201	682	100	504	264
1 020	248	96	1386	3 213	240
60	255	1 953	160	372	1562

Divisiones y decimales

Truco para dividir

Escribe un número de tres cifras. Luego introdúcelo en la calculadora dos veces para que aparezca en imagen un número de seis cifras.

Divide por 11, luego por 13 y luego por 7. ¿Qué ocurre?

Haz el truco varias veces con números de tres cifras.

Cómo funciona

Repetir un número de tres cifras es lo mismo que multiplicarlo por 1.001.

358 × 1.001 = 358.358

358 × 1.001 es lo mismo que 358 × 1.000 más 358 × 1.

Dividiendo por 11, luego por 13 y luego por 7 es lo mismo que dividir por 1.001, porque 11 × 13 × 7 = 1.001.

358.358 ÷ 1.001 = 358

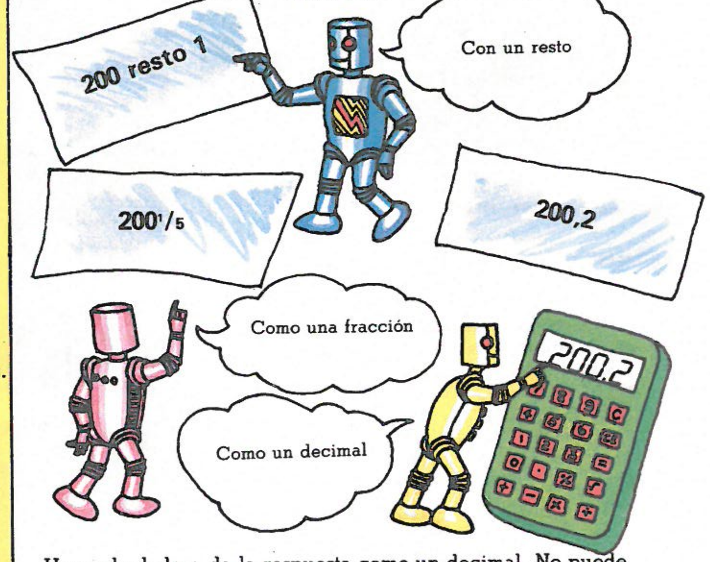
A los números 11, 13 y 7 se les llama divisores de 1.001, porque son números enteros que multiplicados entre ellos forman 1.001.

¿Puedes pensar en un truco para cuatro dígitos, basándote en el hecho de que 73 y 137 son divisores de 10.001?

Restos

Si divides un número por otro que no es uno de sus divisores, la respuesta no será nunca un número entero. Puede expresarse de varias formas. Mira el ejemplo siguiente.

1.001 ÷ 5 =

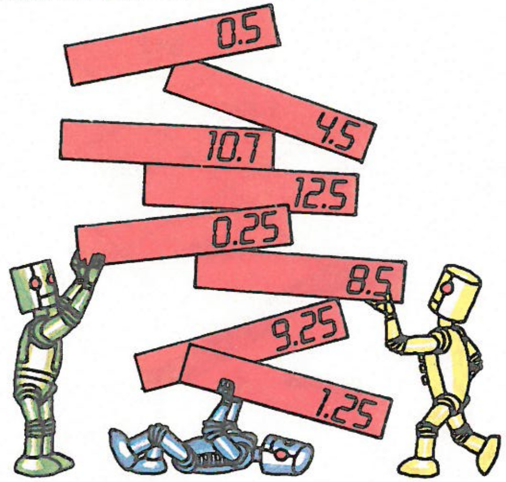


Una calculadora da la respuesta como un decimal. No puede mostrar restos o fracciones. Si un número al dividirlo no es exacto, la calculadora continúa dividiendo el resto. ¿Puedes hallar un método para calcular el resto a partir de la solución dada por la calculadora? El problema siguiente puede darte una pista.

Emparejamiento

¿Puedes dar a estas divisiones la respuesta que les corresponde? Usa la calculadora para comprobar los resultados.

17 ÷ 2
107 ÷ 10
100 ÷ 8
37 ÷ 4
8 ÷ 16
12 ÷ 48
54 ÷ 12
10 ÷ 8



Respuestas sin fin

20 ÷ 12 = 1.666 666 666 666 666

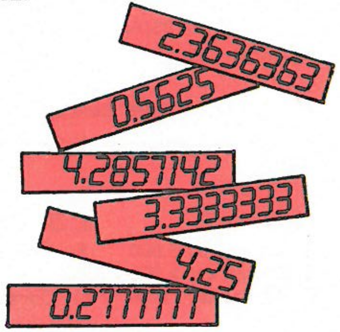
A menudo, incluso el resto no da un número exacto. Esto produce un decimal periódico puro, en el cual los números se repiten a partir de la coma.

La mayor parte de las calculadoras muestran ocho cifras, por lo que nunca ves más de siete decimales. En algunas calculadoras la última cifra está redondeada.

Más problemas de emparejamiento

Aquí hay más divisiones para que emparejes con su solución.

30 ÷ 7
26 ÷ 11
10 ÷ 3
17 ÷ 4
5 ÷ 18
9 ÷ 16



1 ¿Cuál es el mayor?

0,066 666 6

0,2

¿Cuál de estos dos números es mayor? Recuerda que es tan importante la posición de los números como su valor individual.

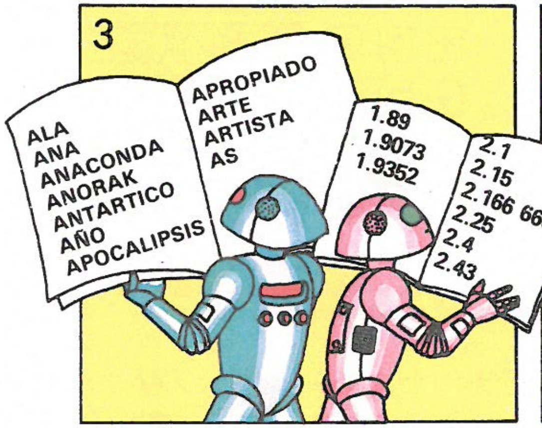
2

0,066 666 6 es ¹/₁₅ o 1 ÷ 15

0,2 es ¹/₅ o 1 ÷ 5

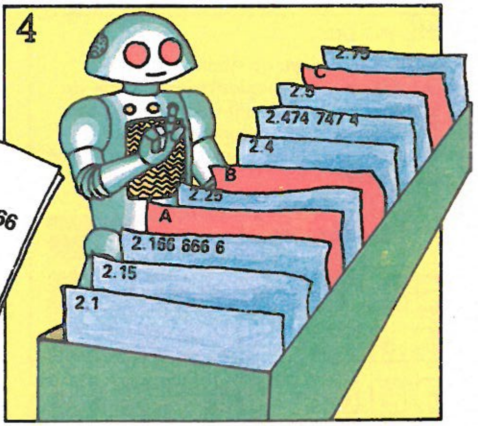
En el número 0,0666666 la primera cifra que aparece tras la coma es el cero. En el número 0,2 la primera es un 2, por lo que 0,2 es el número mayor.

3



Un buen método de ordenar decimales por su tamaño es pensar en ellos como palabras en un diccionario. Por ejemplo, ANA va antes que APOCALIPSIS porque la N va antes que la P en el alfabeto.

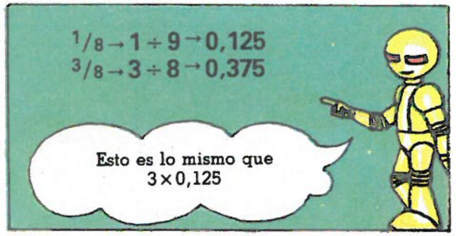
4



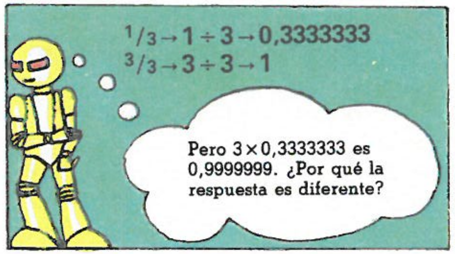
Estas cartulinas están colocadas en orden numérico. Las tres cartulinas sin número contienen las respuestas a las operaciones 7 ÷ 3, 49 ÷ 19 y 440 ÷ 200. ¿Puedes decir qué operación pertenece a cada cartulina?

Problemas con fracciones

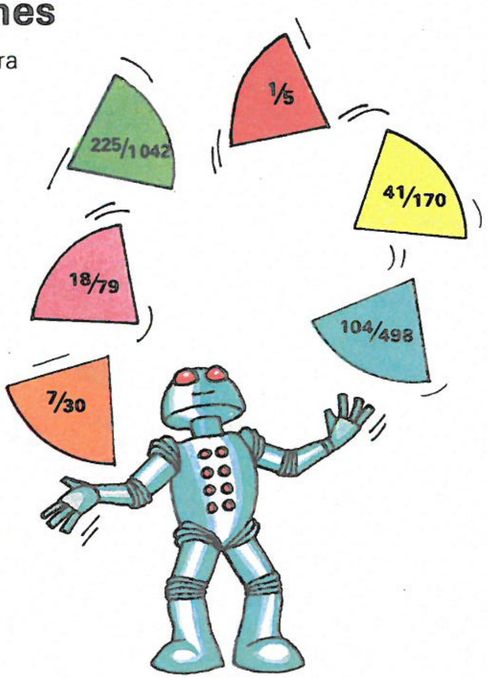
Para calcular fracciones en una calculadora tienes que transformarlas en decimales, dividiendo la parte superior por la inferior, como se demuestra abajo.



Algunas fracciones dan resultados interesantes. Prueba con $^1/_3$, $^2/_3$ y $^3/_3$.



La razón para que la respuesta sea distinta es que 0,3333333 no es exactamente $^1/_3$, pero es lo más aproximado que se obtiene con una calculadora. Cuando es multiplicado por 3 la respuesta está muy próxima, pero no es exactamente igual a 1.

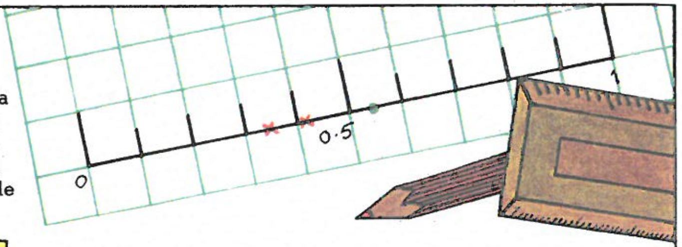


Ordenación de fracciones

A menudo es muy difícil saber cuándo una fracción es mayor que otra, especialmente cuando la parte inferior es distinta. Si las conviertes en decimales es más fácil de distinguir. ¿Puedes ordenar las fracciones de arriba en orden de tamaño, primero la más pequeña?

Triada

Este es un juego para que lo hagas con un amigo. Necesitas un trozo de papel y dos bolígrafos o lápices de distinto color.



1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12

Dibuja una línea en el papel y divídela en 10 partes. Numera los extremos con un 0 y 1 y el punto central con 0,5.

Para jugar cada jugador escoge por turno dos números de la tabla de la izquierda para formar una fracción y después transformarla en decimal y marcar su lugar en la línea. El objetivo del juego es conseguir tres marcas en línea sin ninguna de las marcas de tu amigo en medio.

Si el decimal es superior a 1 te sales de la línea y pierdes un turno.

Fracción perdida

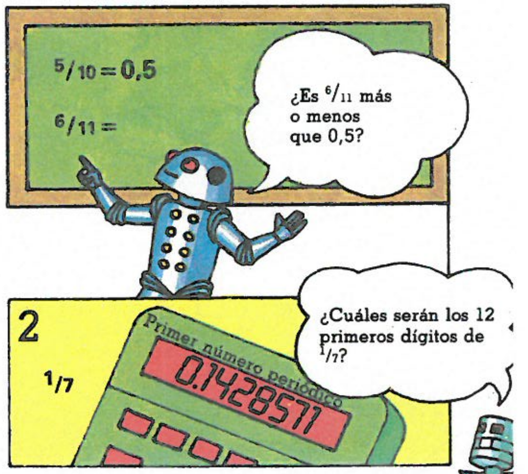
1 Buscar la secuencia

$^1/_7$ $^2/_7$ $^3/_7$

$^4/_7$ $^5/_7$ $^6/_6$

Si conviertes (fracciones de) séptimos a decimales aparecerá siempre la misma secuencia de dígitos, empezando cada vez en un lugar distinto. Haz las operaciones que aparecen arriba para ver si reconoces la secuencia.

Denominador y numerador



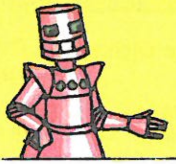
De hecho, cada fracción produce un decimal periódico a partir del cual se repite una secuencia de seis cifras. La mayor parte de las calculadoras sólo tienen espacio para mostrar una sola vez la secuencia, pero puedes ver el primer número periódico.

3

$^1/_{17} = 0{,}058\ 823\ 5$

$^2/_{17} = 0{,}117\ 647\ 0$

$^3/_{17} = 0{,}176\ 470\ 5$



$^4/_{17} = 0{,}235\ 294\ 1$

$^5/_{17} = 0{,}294\ 117\ 6$

$^6/_{17} =$

Las fracciones con 17 como denominador producen unas secuencias de 16 cifras. Esta es demasiado larga para la pantalla de la calculadora. ¿Sabrás hallar cuál es la secuencia que se repite fijándote en las operaciones que están arriba y hallar las 16 cifras que se repiten para $^1/_{17}$?

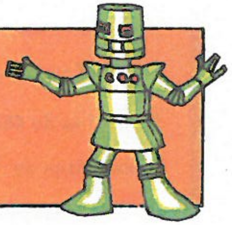
Trata de predecir el valor decimal de $^6/_{17}$ sin usar una calculadora.

¿Puedes encontrar alguna otra secuencia interesante al convertir fracciones en decimales? El dividir por 11 y 13 podría ser un buen intento.

Fracciones simplificadas

$^3/_{10} \times 2\tfrac{1}{2}$ $^3/_5 \times {}^4/_7$ $^7/_8 \times {}^3/_4$

$\tfrac{1}{2} + {}^1/_4$ $5\,^1/_8 - 3\,^3/_4$ $\tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2}$



Las operaciones con fracciones son más fáciles usando una calculadora. Tú transformas la fracción en decimal antes de empezar. Prueba haciendo estos ejemplos.

Para no tener que escribir el número decimal de cada fracción, puedes almacenarla en la memoria mientras trabajas con otra.

Siendo preciso

Una calculadora con ocho dígitos es a menudo mucho más precisa de lo que necesitas. Por ejemplo, imagínate que deseas saber cuánto tardarás en hacer un viaje de 270 km. a 110 km/h.

270 ÷ 110 = 2,454 545 4 horas

La respuesta de una calculadora no es muy útil como respuesta, porque es muy detallada. Para planear el viaje sólo necesitas saber que te llevará unas dos horas necesitas que sea la respuesta a tu pregunta. ¿Cómo aproximarías los números para esta pregunta.

Cuando resuelvas un problema debes pensar sobre lo aproximada que necesitas que sea la respuesta a tu pregunta. ¿Cómo aproximarías los números en las afirmaciones siguientes si se las estuvieses diciendo a un amigo?

1. Un año luz es 5.865.696.000.000 millas o 9.385.113.600.000 kilómetros.
2. Hay 30.126.541 gatos en EE.UU.
3. La población de Londres es de 6.877.142.
4. La calle más corta de Inglaterra tiene 17,672 metros de longitud.

Problemas

1. El récord mundial de velocidad del tren más rápido es de 410 km/h. En 1829 el récord era de 29,1 millas por hora. ¿Cuántas veces es mayor el nuevo récord? (1 milla es $^{8}/_{5}$ de kilómetro).

2. La vía de ferrocarril más larga va desde Moscú a Nakhodka, con 9.438 km. ¿Cuánto tardará un tren en recorrerla si viaja a una velocidad media de 120 km/h.?

3. ¿Has vivido un millón de horas?

Aproximación de las tres últimas cifras

Al redondear la distancia 293.467 km. a la decena de miles de kilómetros más próximos, se obtiene 290.000 km. Sólo los dos primeros números son precisos, y se les denomina números significativos.

Como regla general, una respuesta con tres cifras significativas es en la mayoría de los problemas suficiente. El redondear un número a tres cifras significativas quiere decir que estás despreciando una parte muy pequeña de la respuesta. Puedes ver esto en el ejemplo siguiente.

293.467 se convierte en **293.000.**

El error es de **467** en **293.000** o $^{467}/_{293.000}$.

Eso es cerca de $^{500}/_{300.000}$ o $^{1}/_{600}$.

Al redondear la cifra 293.467 km. a tres cifras significativas da un error de 467 en 293.000 o cerca de 1 en 600, por lo que sólo estás ignorando un seiscientosavo de la respuesta.

Indicaciones para redondear

1. Los ceros entre las cifras significativas y la coma decimal no se tienen en cuenta.

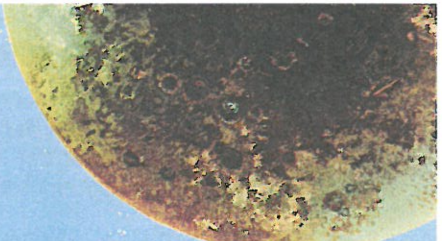
0,005 213 3 → 0,005 21
26.833.000 → 26.800.000

2. Si el cuarto número es un 5 o superior, debes sumar 1 a la tercera cifra significativa.

0,005 216 → 0,005 22
543.724 → 544

¿Puedes redondear estas respuestas a tres cifras significativas?

1. **0,006 376 3**
2. **0,062 871 9**
3. **264,374 12**
4. **781 432,16**
5. **0,199 999 9**



Problemas espaciales

Cuando hagas estos problemas redondea las respuestas de forma que tengan sentido.

1. La Luna está a 240.000 millas de distancia. ¿Cuánto tiempo tardará una nave espacial en llegar a la Luna a 1 milla por segundo?

2. Una nave espacial abandona la Tierra y viaja a 40.000 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a Marte si está a 56 millones de km. de distancia?

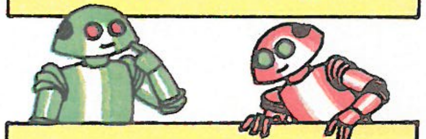
3. El Sol y la Luna aparecen con casi el mismo tamaño. Pero el diámetro del Sol es de 1.382.400 km. y el de la Luna es sólo 3.480 km. ¿Cuántas veces más grande es el Sol que la Luna en realidad?

Juego: «entre números»

Para realizar este juego se necesitan dos personas. Por turno, eligen dos números de la tabla de la derecha. Divide uno por el otro, luego mira la tabla de puntuaciones para ver cuántos puntos has conseguido. El primero en llegar a 10 puntos gana (Un número no puede utilizarse dos veces en el juego).

PUNTUACIONES

Respuesta	Puntuación
Entre 0 y 1	1 punto
Entre 1 y 10	2 puntos
Entre 10 y 100	3 puntos
Más de 100	Cero



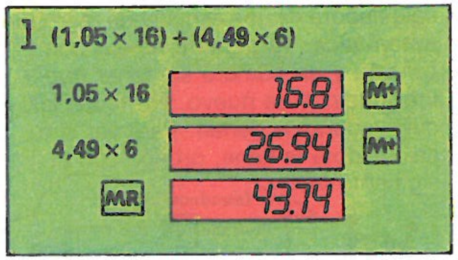
TABLA

9	23	31	46
97	129	152	216
255	364	440	800
1.974	2.132	2.561	2.619
2.815	3.966	4.770	9.342
13.000	14.500	16.000	29.500

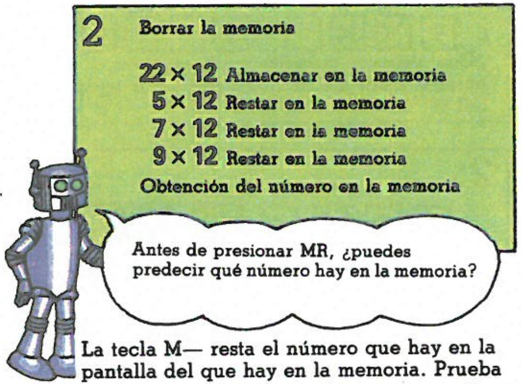
Usa tu memoria

La memoria en una calculadora es muy útil para cuando haces operaciones con varias partes. La nomenclatura de la tecla de una memoria varía de una calculadora a otra, y si la tuya es diferente a la que se muestra aquí, comprueba tu manual de instrucciones.

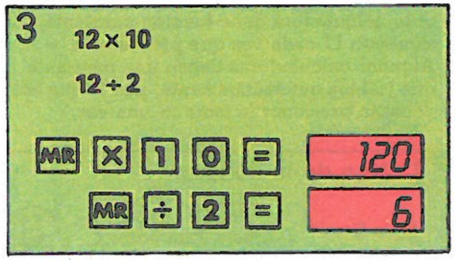
Para almacenar un número en la memoria debes usar la tecla M+. En muchas calculadoras se borra el número de la memoria presionando la tecla MR («Memory recall») dos veces. En otras presionas MR para sacar en pantalla el número y luego M− para restar el número que hay en la pantalla del que hay en la memoria. Practica el uso de las teclas de la memoria con estas operaciones.



Para resolver esta suma, primero se hace la primera multiplicación y se almacena la respuesta en la memoria. Luego se hace la segunda multiplicación y se suma el resultado a la memoria presionando la tecla M+. La memoria ahora tiene la suma de ambas operaciones. Para obtener el resultado se presiona la tecla MR.



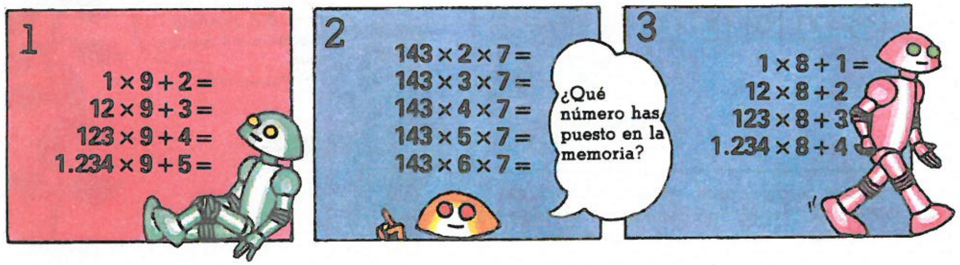
La tecla M— resta el número que hay en la pantalla del que hay en la memoria. Prueba con las operaciones superiores para practicar. Deja la respuesta total en la memoria para usarla en la siguiente operación.



Una vez que un número ha sido almacenado en la memoria lo puedes utilizar para otras muchas operaciones por separado. Prueba con los ejemplos de arriba. El usar el número en nuevas operaciones no lo borra de la memoria. Sólo se elimina si lo borras o apagas la calculadora.

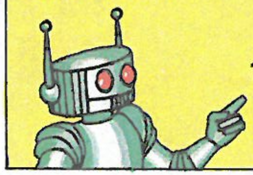
Repeticiones

Aquí hay algunas operaciones que producen una secuencia interesante de números. Cada operación implica el uso de los números una y otra vez, y puedes almacenar el número en la memoria.



¿Sabes por qué se obtiene esta secuencia? Hay algunas informaciones en las respuestas que aparecen al final del libro.

Conversiones



85 km. 100 km. 50 km. 270 km.

126 km. 32 km. 10 km. 115 km.

¿Puedes pasar estas distancias en kilómetros a millas? (Un kilómetro son $^5/_8$ de una milla). Trata de usar la memoria para operar más rápidamente.

Orden en las operaciones

Cuando estés usando la memoria para calcular divisiones debes planear las operaciones cuidadosamente. Mira el ejemplo siguiente.

$$\frac{285 + 117}{264 - 68}$$

1. 264 − 68 = M+

2. 285 + 117 =

3. ÷ MR =

Para calcular esta operación debes hacer la parte inferior primero y almacenar la respuesta en la memoria. Luego realiza la parte superior y divide la respuesta por el número que hay en la memoria. Para mejorar, practica con operaciones como ésta e intenta hacer el problema de la página 18.

¿Quién gana?

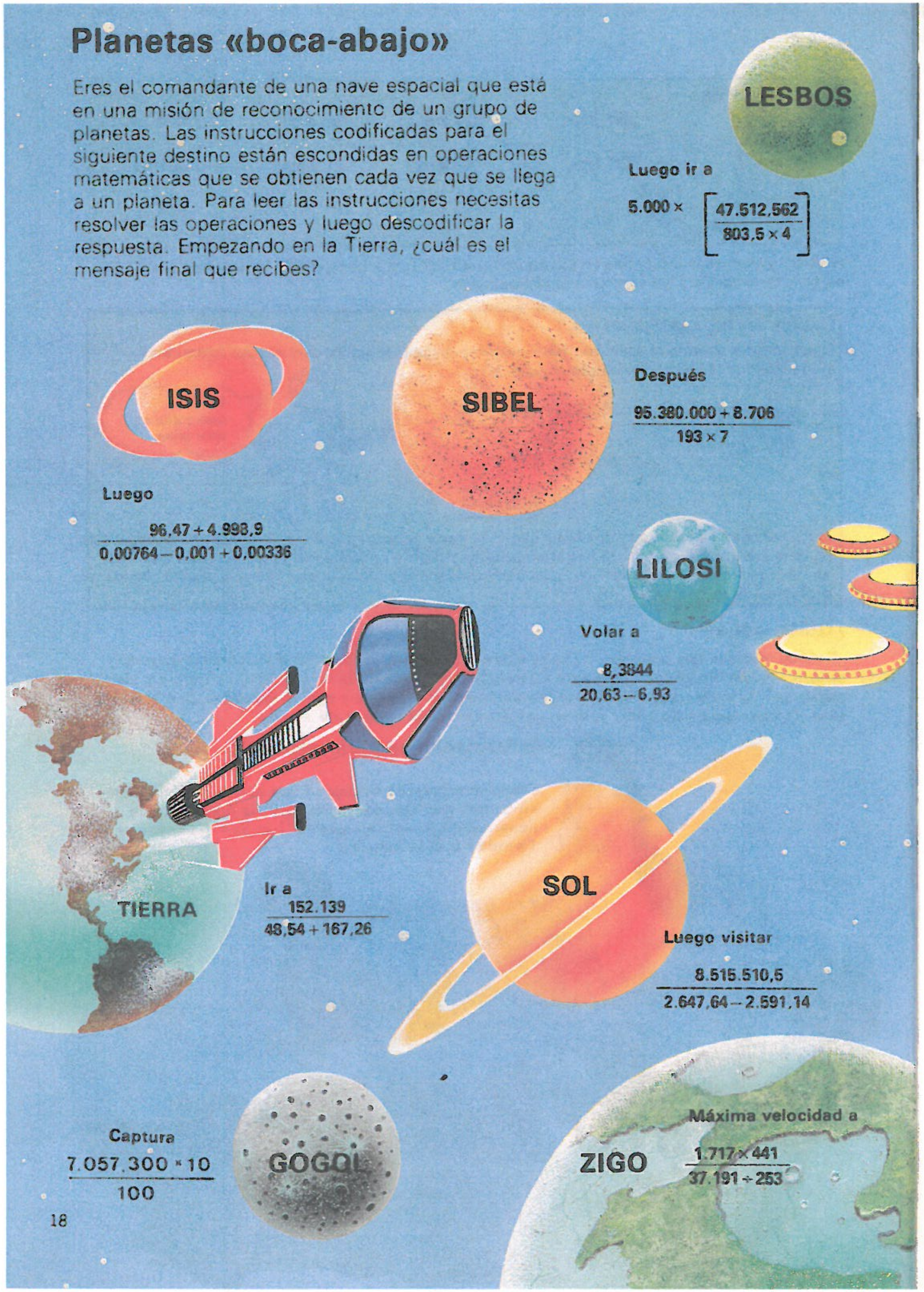
¿Puedes resolver este problema? Debes planear las operaciones cuidadosamente para poder utilizar la memoria de la calculadora. El caballo corre una milla en un minuto y treinta y cinco segundos y la mujer corre 800 metros en un minuto y cuarenta y cuatro segundos. Si a la mujer se le da una ventaja de 1.000 yardas, ¿quién ganará la carrera de 1 milla?

Informaciones para resolverlo

Debes averiguar la velocidad con la que corre la mujer en metros por segundo y convertir la distancia que tienen que recorrer en metros (1 milla = 1.760 yardas y 1 yarda = 0,9144 metros).

Planetas «boca-abajo»

Eres el comandante de una nave espacial que está en una misión de reconocimiento de un grupo de planetas. Las instrucciones codificadas para el siguiente destino están escondidas en operaciones matemáticas que se obtienen cada vez que se llega a un planeta. Para leer las instrucciones necesitas resolver las operaciones y luego descodificar la respuesta. Empezando en la Tierra, ¿cuál es el mensaje final que recibes?



Luego ir a

$$5.000 \times \left[\frac{47.512{,}562}{803{,}5 \times 4}\right]$$

Después

$$\frac{95.380.000 + 8.706}{193 \times 7}$$

Luego

$$\frac{96{,}47 + 4.998{,}9}{0{,}00764 - 0{,}001 + 0{,}00336}$$

Volar a

$$\frac{8{,}3844}{20{,}63 - 6{,}93}$$

Ir a

$$\frac{152.139}{48{,}54 + 167{,}26}$$

Luego visitar

$$\frac{8.515.510{,}5}{2.647{,}64 - 2.591{,}14}$$

Captura

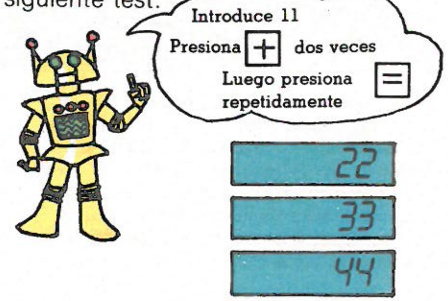
$$\frac{7.057.300 \times 10}{100}$$

Máxima velocidad a

$$\frac{1.717 \times 441}{37.191 \div 253}$$

Operaciones continuas

La función constante en una calculadora es una especie de memoria automática. Te permite repetir una función y un número sin tener que introducirlos de nuevo. No todas las calculadoras la tienen. Para ver si tu calculadora la tiene, prueba con el siguiente test.



Si tu calculadora tiene función constante, irá sumando 11 cada vez que presiones el =. Algunas calculadoras tienen una constante que trabaja automáticamente, por lo que sólo deberán presionar la tecla + una vez.

Investigación de constantes

Si tu calculadora tiene función constante, haz lo siguiente.

1. $\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ $\boxed{+}$ $\boxed{+}$ $\boxed{=}$
2. $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$
3. $\boxed{5}$ $\boxed{-}$ $\boxed{-}$ $\boxed{=}$
4. $\boxed{1}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$
5. $\boxed{1}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$

¿Cuál te acerca más a 100, 10 presiones u 11?

6. $\boxed{-}$ $\boxed{5}$ $\boxed{-}$ $\boxed{-}$ $\boxed{=}$

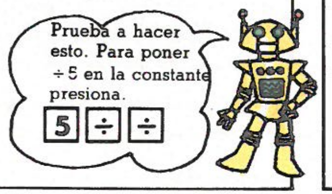
¿Por qué se hace cada vez mayor?

7. $\boxed{9}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ $\boxed{9}$ $\boxed{+}$ $\boxed{+}$ $\boxed{=}$

¿Cuál de estos deberías presionar para obtener todos los múltiplos de 9 en la tabla del 9?

1 Uso de la constante

60 ÷ 5
5.000 ÷ 5
12,5 ÷ 5
0,5 ÷ 5



Una vez que le hayas dado a la calculadora una constante como « ÷ 5» puedes usarla con cualquier número que introduzcas, siempre que no borres la pantalla o presiones una tecla de operación.

2

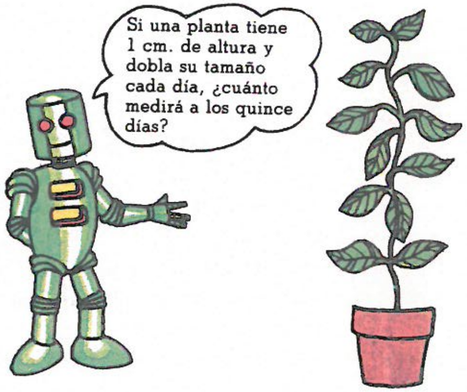
$\boxed{7}$ $\boxed{+}$ $\boxed{+}$ $\boxed{=}$ 14
$\boxed{=}$ 21
$\boxed{-}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ 20

Si deseas hacer un cálculo distinto con el número que aparece en pantalla, puedes hacerlo, ya que cualquier tecla de operaciones borra la constante.

3

$\boxed{+}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{K}$ $\boxed{=}$ 20
$\boxed{=}$ 30
$\boxed{=}$ 40

Algunas calculadoras, y las científicas en particular, tienen una constante señalada con una K. Para usar esta constante debes introducir la función y el número que quieras repetir y luego presionar K, como se muestra arriba.

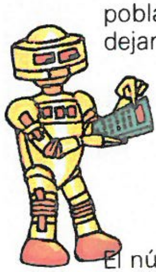


---

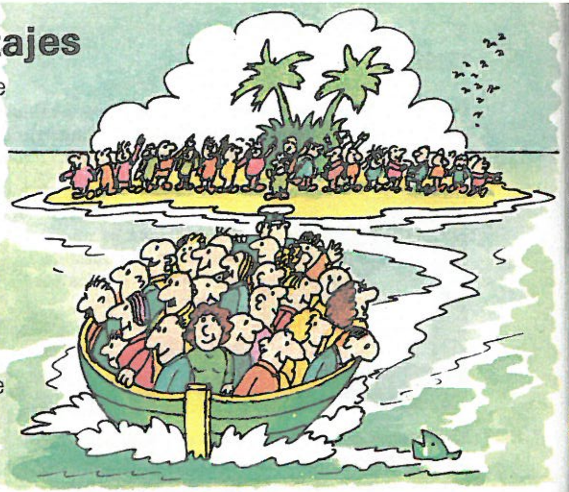
* En calculadora con una constante automática puede que necesites presionar el 5, ÷ y el = antes de empezar.

Problema de porcentajes

La isla de Brigg tiene una población de 249.000 habitantes. El 20% de la población emigra, ¿cuántas personas dejan la isla?



Para hallar porcentajes multiplicas el número por el porcentaje que deseas hallar y luego la tecla %. No hay necesidad de presionar el =.



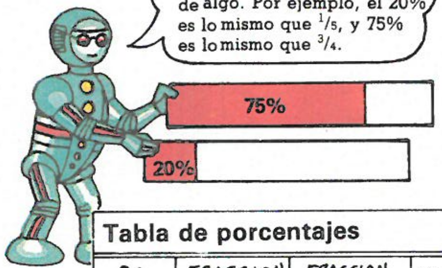
El número de personas que permanece es ahora del 80%, ¿cuántas personas son? ¿Conoces alguna forma de comprobar la respuesta?

20% de 4.000 **20% de 12,5** **90% de 8,9** **50% de 500**

¿Puedes hallar estos porcentajes?

Más sobre porcentajes

Un porcentaje es una forma útil de describir una fracción de algo. Por ejemplo, el 20% es lo mismo que $^1/_5$, y 75% es lo mismo que $^3/_4$.



Al igual que las fracciones, los porcentajes se pueden expresar en decimales.

20% → 20/100 → 1/5 → 0,2

75% → 75/100 → 3/4 → 0,75

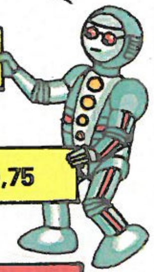


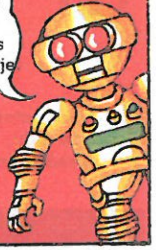
Tabla de porcentajes

%	FRACCION (SOBRE 100)	FRACCION SIMPLIFICADA	DECIMAL
50%	$\frac{50}{100}$		0'5
25%	$\frac{25}{100}$		
10%		$\frac{1}{10}$	
$33\frac{1}{3}\%$	$\frac{33'33}{100}$	$\frac{1}{3}$	0'3333
15%		$\frac{3}{20}$	
		$\frac{2}{3}$	

La tabla de arriba muestra los porcentajes más usados con su equivalente en fracción y decimal. ¿Puedes completar los que faltan?

Porcentajes sin la tecla %

El 20% de 249.000 es lo mismo que 0,2×249.000. Intenta resolver los ejemplos siguientes sin utilizar la tecla del porcentaje.



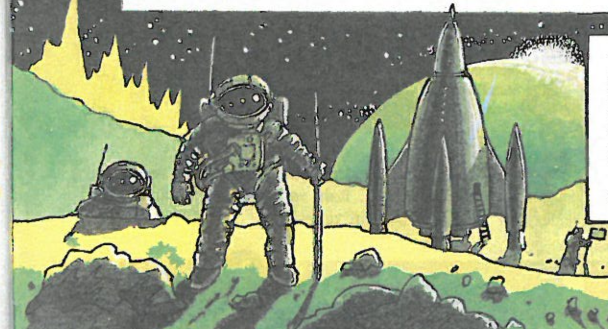
15% de 30

50% de 50

Si tu calculadora no tiene tecla de porcentaje, necesitas convertir los porcentajes en decimales. Para hacer esto divide por 100, como se muestra en la tabla de la izquierda.

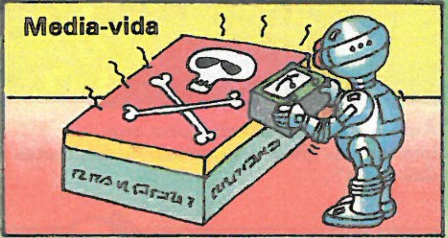
¿Cuál es la diferencia?

Si el peso de un astronauta de la Tierra aumenta un 20% en el planeta Zardoz, ¿cuánto pesarías en Zardoz? Puedes averiguar esto de seis formas diferentes, como se muestra debajo. Los métodos 1, 2 y 3 te dan el aumento de porcentaje que puedes sumar a tu peso. Los métodos 4, 5 y 6 dan el número de peso directamente.



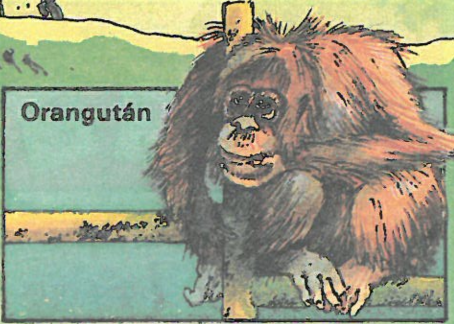
1. Multiplica el peso por 20%.
2. Multiplica el peso por 20 y divide por 100
3. Multiplica el peso por 0,2.
4. Multiplica el peso por 120%.
5. Multiplica el peso por 120 y divide por 100.
6. Multiplica el peso por 1,2.

Media-vida



La radiactividad de un imaginario producto químico, el Zilium, es de 463 unidades, pero decrece en un 50% cada día. ¿Cuántos días tardará en estar el desprendimiento de radiactividad dentro del nivel de seguridad de cuatro unidades?

Orangután



El orangután está en peligro de extinción. Si hay 5.000 en libertad y su número decrece en un 15% cada año, ¿cuántos años tienen que pasar para que queden menos de 2.500?

Ganando dinero

Has ganado un concurso de TV, pero hay una última pregunta: ¿Cómo quieres recibir tu dinero? Hay dos posibilidades.

1. Puedes recibir 100 billetes de banco el primer año, un 10% menos al año siguiente, un 10% menos al siguiente, y así sucesivamente durante 10 años.

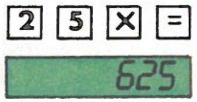
2. Puedes recibir 10 billetes de banco el primer año, un 50% más al año siguiente, y así sucesivamente durante diez años.

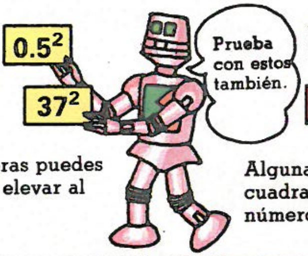
¿Qué método eliges?
(Debes usar la memoria de tu calculadora para obtener las sumas totales del dinero que consigues cada año.)

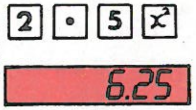
Cuadrados

Elevar un número al cuadrado significa multiplicarlo por sí mismo. Por ejemplo, el cuadrado de siete (escrito 7^2) es 7 × 7. El cuadrado de 7 es 49.

Los cuadrados de números pequeños son fáciles de calcular mentalmente, pero necesitarás la calculadora para números grandes.





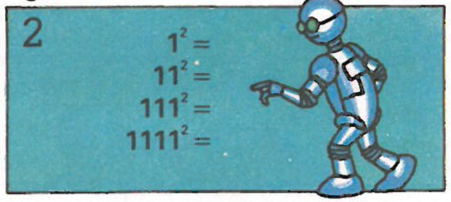


En la mayoría de las calculadoras puedes usar la función constante para elevar al cuadrado un número*.

Algunas calculadoras tienen una tecla para cuadrados x^2. Esta te dará el cuadrado del número que introduzcas.

1 Problemas con cuadrados

Estas parejas de cuadrados ofrecen un resultado interesante cuando las calculas. Intenta hallar otros como éstos.



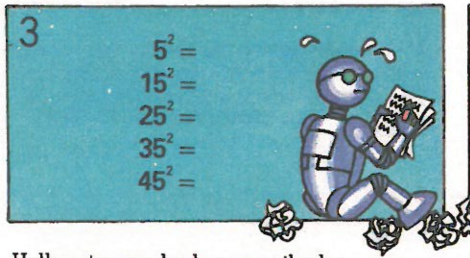
$1^2 =$

$11^2 =$

$111^2 =$

$1111^2 =$

Aquí hay más cuadrados para que investigues. ¿A qué secuencia de respuestas dan lugar?



$5^2 =$

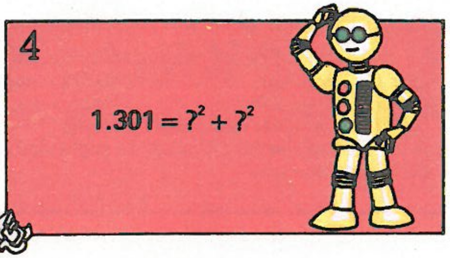
$15^2 =$

$25^2 =$

$35^2 =$

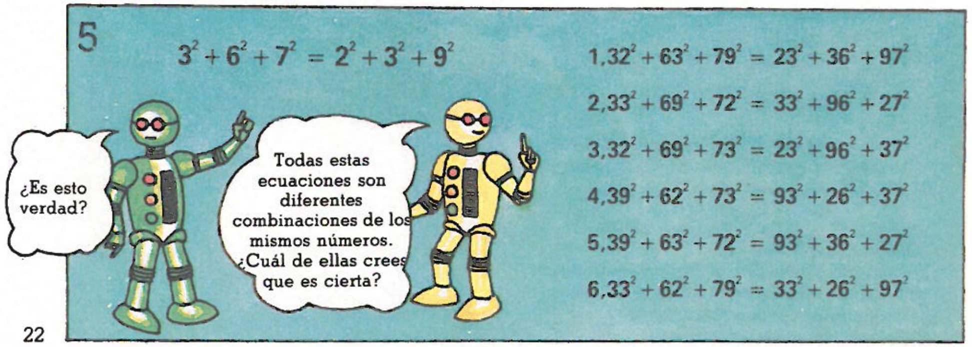
$45^2 =$

Halla estos cuadrados y escribe las soluciones. Luego prueba a calcular el cuadrado de 55 sin calculadora (sin lápiz y papel).



$1.301 = ?^2 + ?^2$

El número 1.301 es la suma de los cuadrados de dos números consecutivos. ¿Sabes cuáles?



$3^2 + 6^2 + 7^2 = 2^2 + 3^2 + 9^2$

1, $32^2 + 63^2 + 79^2 = 23^2 + 36^2 + 97^2$

2, $33^2 + 69^2 + 72^2 = 33^2 + 96^2 + 27^2$

3, $32^2 + 69^2 + 73^2 = 23^2 + 96^2 + 37^2$

4, $39^2 + 62^2 + 73^2 = 93^2 + 26^2 + 37^2$

5, $39^2 + 63^2 + 72^2 = 93^2 + 36^2 + 27^2$

6, $33^2 + 62^2 + 79^2 = 33^2 + 26^2 + 97^2$

Triángulos antiguos

Las medidas que aparecen en lugares prehistóricos como Stonehenge, en Gran Bretaña, muestran que en la Edad de Piedra los constructores conocían los principios del teorema de Pitágoras mucho antes de que éste naciera.

El teorema de Pitágoras dice que siempre que un triángulo tenga una esquina cuadrada (eso es un ángulo recto de 90°) el cuadrado del lado más largo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados. Puedes comprobar esto con el triángulo de arriba.

El teorema también vale en el otro sentido. Si el cuadrado de dos lados de un triángulo es igual al cuadrado del tercer lado, el triángulo ha de poseer un ángulo recto. ¿Tiene el triángulo de arriba un ángulo recto?

3, 4, 5, **12, 35, 37** **5, 12, 13** **19, 59, 62**

41, 71, 82 **8, 15, 17** **8, 9, 12**

Los constructores de la Edad de Piedra usaban triángulos para construir ángulos rectos. A pesar de todo, no siempre eran exactos. Las medidas que aparecen arriba son de triángulos encontrados en Stonehenge y otros lugares. ¿Cuáles dan ángulos rectos perfectos?

Problemas para aplicar el teorema de Pitágoras

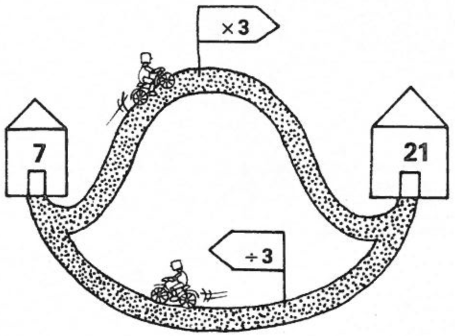
El teorema de Pitágoras también es útil para calcular distancias desconocidas. Por ejemplo, ¿cuál es la longitud del tercer lado en este triángulo rectángulo?

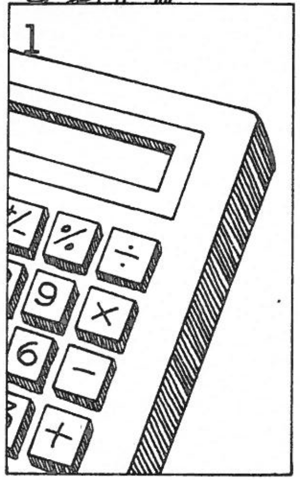
---

* Probablemente tengas que presionar X una sola vez.

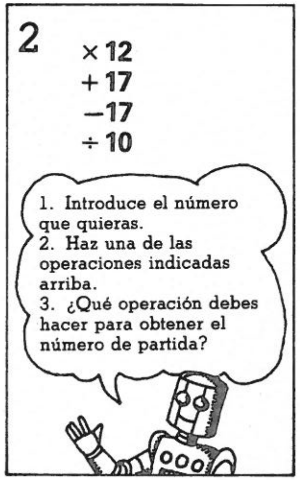
Opuestos

Algunas de las operaciones de una calculadora tienen un efecto opuesto o inverso uno con respecto al otro. Por ejemplo, dividir entre 3 es el efecto inverso de multiplicar por 3. Mira el ejemplo de la derecha.

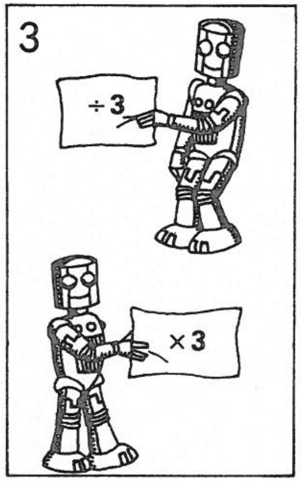




Las cuatro operaciones básicas de la calculadora pueden dividirse en dos grupos, cada uno compuesto de una operación y su inversa.



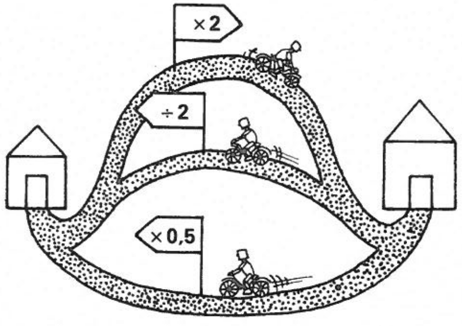
Prueba con las indicaciones del robot para encontrar la inversa de cada operación.



La operación ÷3 invierte el efecto de ×3, ¿pero ×3 invierte ÷3? Prueba con varios números y comprueba.

Alternativas

Hay normalmente más de una inversa para cada operación en particular. Por ejemplo, si multiplicas por 2, puedes obtener el número de partida si ÷2 ó ×0,5



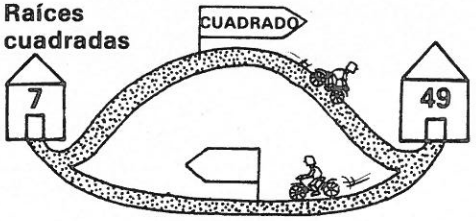
¿Puedes hallar más de una inversa de la operación ÷5?

Problema de inversos

×5÷8 -0,5
×42 -0
÷42 -42
÷8×5 ÷4,2 -1,6
×1 +0,5 +42 ×4,2
+1,6
×1,6 ×0
÷5×8 ÷0

De las operaciones superiores, ¿cuántas parejas puedes formar en las que una operación sea la inversa de la otra? ¿Qué operaciones quedan?

Raíces cuadradas

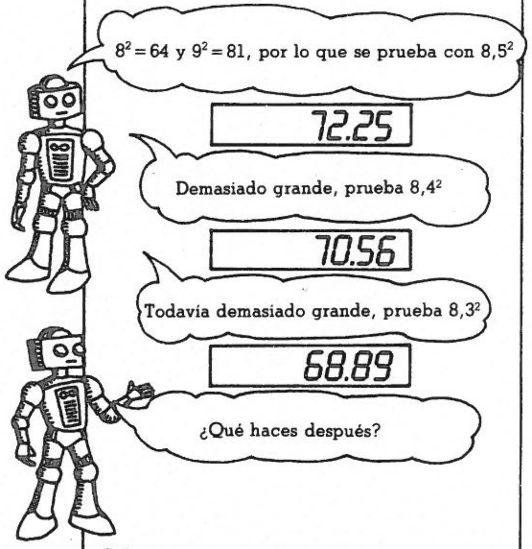


La raíz cuadrada de un número es la inversa del cuadrado. La raíz cuadrada de 49 (escrito √49) es 7.

Algunas calculadoras tienen una tecla para la raíz cuadrada √. Puedes averiguar cómo usarla arriba.

Raíces cuadradas sin la tecla √

El hallar la raíz cuadrada sin la tecla adecuada se hace por el método de tanteo. Por ejemplo, para hallar √70 primero trata de adivinarlo.



¿Sabrías continuar los cálculos para hallar la raíz de √70 usando tres decimales? (es decir, que la respuesta debe tener tres decimales).

De hecho, la calculadora realiza las raíces cuadradas por el método de tanteos, y algunas calculadoras tardan más en responder a una raíz que a otras preguntas.

Truco para resolver raíces

Para hacer este truco de lectura mental pídele a un amigo que piense en dos números que presenten entre ellos una diferencia de 2 (ejemplo: 16 y 18) y que los recuerde sin decirte cuáles son. Luego dale a tu amigo una calculadora y dile que haga las siguientes operaciones.

Multiplica los dos números — 1 6 × 1 8 =

Luego súmale 1 — + 1 =

Ahora toma la calculadora y halla la raíz cuadrada del número que hay en pantalla. — 289 √

17

Sumándole 1 al resultado obtendrás uno de los números que ha pensado tu amigo y restando 1 obtendrás el otro. Prueba el truco con distintos números.

Cálculos del círculo

Se sabe desde hace mucho tiempo que sea cual sea el tamaño de un círculo, su circunferencia es «tres veces y un poco» más que su diámetro. Aún así, el tamaño exacto de ese «poco» todavía no se ha hallado. El número «tres y un poco» está representado por la letra griega π (pronunciada pi). Las calculadoras modernas han averiguado el valor de π hasta varios centenares de decimales. Aquí tienes los primeros 600.

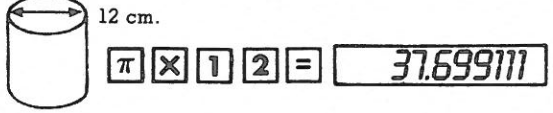
$\pi =$ 3.14159265358979323846264338327950288419716939
9375105820974944592307816406286208998628034825342
1170679821480865132823066470938446095505822317253
5940812848111745028410270193852110555964462294895
4930381964428810975665933446128475648233786783165
2712019091456485669234603486104543266482133936072
6024914127372458700660631558817488152092096282295
4091715364367892590360011330530548820466521384146
9519415116094330572703657595919530921861173819326
1179310511854807446237996274956735188575272489122
7938183011949129833673362440656643086021394946395
2247371907021798609437027705392171762931767523846
74818467669405132

A lo largo de los siglos diferentes matemáticos han sugerido diversos valores para π. Algunos de éstos se muestran debajo. ¿Cuál es el más próximo al número dado por la computadora?

$4\times(1-{}^1/_9)^2$ ← **Egipcio (1650 a. C.)**
$355/113$ ← **Chino (500 d. C.)**
$3\,{}^1/_8$ ← **Babilónico (500 a. C.)**
$3.927/1.250$ ← **Indio (400 d. C.)**
$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ← **Griego (450 a. C.)**
Entre $3\,{}^1/_7$ **y** $3\,{}^{10}/_{71}$ ← **Arquímedes (220 a. C.)**

Uso de π

El conocer el valor de π te permite calcular una distancia en un círculo o esfera (es decir, su circunferencia). De hecho, esta lata tiene un diámetro de 12 cm. y su circunferencia es $12\times\pi$.

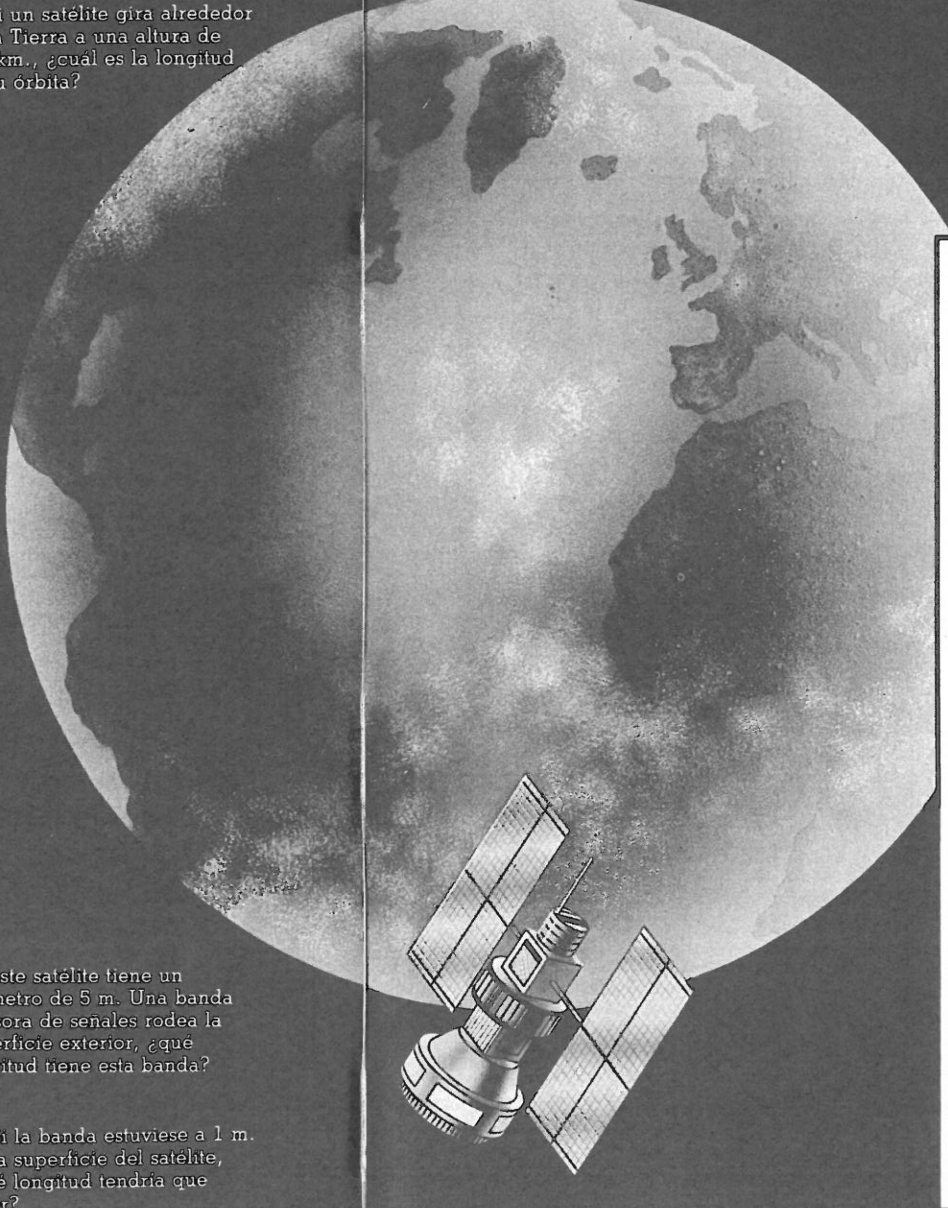


Si tu calculadora tiene una tecla con π puedes obtener la respuesta como se muestra arriba (si no, introduce un número próximo a π; por ejemplo, 3,142). La lata necesita una etiqueta de 37,7 cm. de longitud para rodearla completamente. ¿Cuál sería la longitud de una etiqueta para una lata de 16 cm. de diámetro?

Problemas sobre la Tierra

1. El diámetro de la Tierra es de 12.640 km. ¿Cuál es la longitud de su circunferencia?

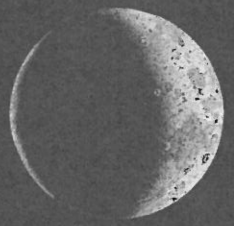
2. Si un satélite gira alrededor de la Tierra a una altura de 100 km., ¿cuál es la longitud de su órbita?



3. Este satélite tiene un diámetro de 5 m. Una banda emisora de señales rodea la superficie exterior, ¿qué longitud tiene esta banda?

4. Si la banda estuviese a 1 m. de la superficie del satélite, ¿qué longitud tendría que tener?

5. Imagínate una cuerda lo suficientemente larga como para rodear el Ecuador, ¿cuál sería su longitud si rodeásemos el Ecuador a una altura de 1 m.? (El diámetro de la Tierra es de 12.640.000 m.)



6. Una nave alrededor de la Luna (diámetro, 3.480 km.) completa su órbita en ocho horas. Si su velocidad es de 1.680 km/h., ¿cuánto recorre en una órbita? ¿A qué distancia de la Luna está su órbita?

División

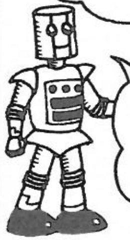
¿Cómo se te dan las divisiones? Este problema probará tu habilidad. En el número de abajo todos los dígitos son distintos.

38 125

La primera cifra, 3, puede dividirse exactamente por 1.
Las primeras dos cifras, 38, pueden dividirse por 2 exactamente.
Las primeras tres cifras, 381, pueden dividirse exactamente por 3.
Las primeras cuatro cifras, 3.812, pueden dividirse exactamente por 4.
Las primeras cinco cifras, 38.125, pueden dividirse exactamente por 5.

¿Puedes hallar un número de cinco cifras que empiece por 7 en el cual las cifras cumplan lo dicho anteriormente? (Todas las cifras deben ser diferentes.) Pide a un amigo que compruebe la respuesta.

¿Puedes formar un número de seis cifras o de siete de esta forma?



Hay un número de nueve cifras que funciona de igual forma. ¿Puedes hallar cuál es?

Problemas con números largos

Algunos problemas implican números demasiado grandes para reflejarse en la calculadora; la mayoría de las calculadoras científicas tienen un sistema llamado «clave científica» para operar con números grandes (páginas 34-35), pero aquí damos un método para utilizarlo en una calculadora sencilla.

Suma y resta de números largos

182 465 300 + 2 286 287 654 + 720 064 164

1824	65300
+ 22862	87654
7200	64164
31886	
2	17118
31888	17118

Esta columna suma 31.886

Esta columna suma 217.118

Para sumar números que no caben en la pantalla puedes dividir la suma como se muestra arriba y sumarlos separadamente. Luego combina las respuestas. Recuerda que si es necesario debes llevar un número del total de la derecha a la izquierda.

2 864 718 237 − 1976 582 714

2864	718237	28647	18237
1976	582714	19765	82714

Puedes usar el mismo método para restar, pero debes tener cuidado con el lugar por donde los divides. ¿Por qué divides la operación de arriba por el lugar indicado en la izquierda?

Resuelve estos ejemplos

1. 5 266 834 710
   \+ 276 647 433
   27 164 311 803

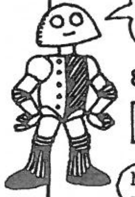
2. 980 065 432
   − 735 917 141

3. 1 262 587 652 321 987 125
   \+ 921 766 412 005 286 421

¿Cómo harías esta suma?

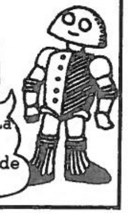
Multiplicaciones y divisiones

1 **864 270 000 × 2 847**



864.27 × 2 847 =

2460576.6

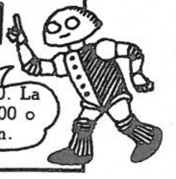


El truco para las multiplicaciones y divisiones es pasar los números a millones. Para convertir números en millones se mueve la coma seis lugares a la izquierda (dividir por 1.000.000).

2 **193 640 000 × 156 343 000**

193.64 × 156.343 =

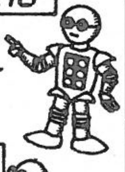
30274.258



Si ambos números son demasiado grandes para escribirlos en la pantalla, pásalos a millones y luego multiplícalos por un millón de millones para compensar (mueve el punto 12 lugares a la derecha).

3 **86 427 000 000 ÷ 2 847**

86 427 ÷ 2 847 = 30.357218



2 847 ÷ 86 427 000 000

2 847 ÷ 86 427 = 0.032941

En divisiones con números muy largos la forma de transformar el resultado depende de a qué numeros de la operación se ha suprimido o añadido ceros. Decide de qué tamaño quieres la respuesta y entonces multiplica o divide el resultado de la calculadora.

4 **86 427 000 000 ÷ 288 090 000**

86 427 ÷ 288.09 =

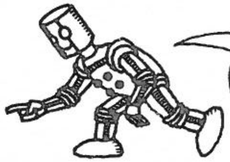
300

Si conviertes ambos números en una división a millones, la respuesta que da la calculadora es correcta.

Desbordamiento

456 000 × 123 000

560.8800E

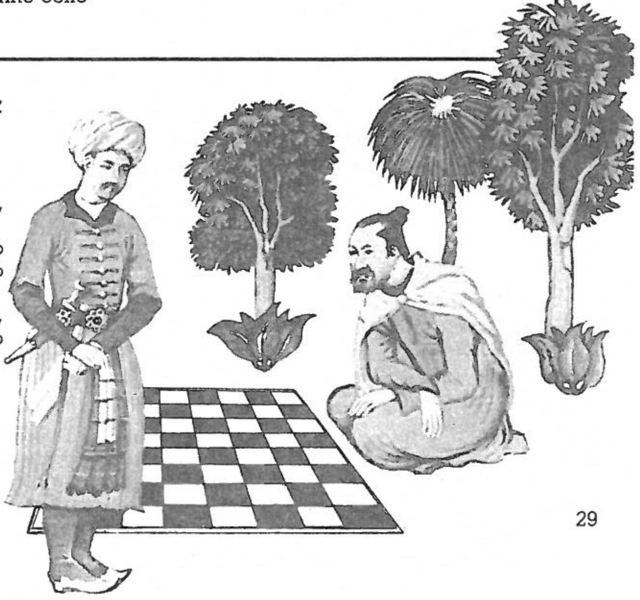


Algunas calculadoras tienen una «señal de desbordamiento» y muestran una E si la respuesta es muy larga para la pantalla. Prueba con el ejemplo anterior. Si en tu calculadora aparece una E puedes hallar la respuesta correcta moviendo el punto ocho lugares a la derecha.

La señal impide realizar cualquier otro cálculo con ese número. A pesar de todo, en algunas calculadoras puedes eliminar la señal presionando «clear entry» y continuar calculando. Recuerda mover el punto ocho lugares a la derecha en tu respuesta final.

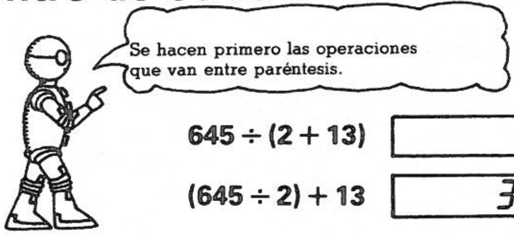
Famoso problema de ajedrez

La historia cuenta que un filósofo indio que ayudaba a su gobernante en una época de grandes dificultades, se le ofreció que pidiera lo que deseara como recompensa. El filósofo dijo que quería simplemente un grano de arroz en el primer cuadro de un tablero de ajedrez, dos en el segundo, cuatro en el tercero, ocho en el cuarto y así sucesivamente, doblando la cantidad en cada cuadro. El gobernante se rió y se alegró por no tener que desprenderse de sus riquezas. Pero pronto dejó de reírse. Usa la función constante (2 XX = , o 2X =) para saber por qué.



Operaciones dentro de otras

645 ÷ 2 + 13



645 ÷ (2 + 13) 43

(645 ÷ 2) + 13 335.5

Esta operación tiene dos posibles respuestas; depende de si realizas primero la división o la suma.

Para evitar confusiones al resolver operaciones con diversas partes, las matemáticas usan paréntesis para indicar qué operaciones se hacen antes. Muchas calculadoras científicas tienen teclas para paréntesis y calculan automáticamente las operaciones por orden.

Ejemplos

1. 41 − (32 − 21)
2. 117 + (39 ÷ 3).
3. (121 ÷ 11) − 10
4. 19 + (348 ÷ 16)
5. (200 − 135) ÷ 45
6. (47 − 7) ÷ (100 ÷ 5)

Haz estas operaciones. Si tu calculadora tiene tecla para paréntesis puedes introducirlas como están escritas. Si no, tienes que decidir el orden (deberías usar la memoria para almacenar la respuesta de una de las partes mientras que haces la otra).

135 ÷ 15 − 6 + 5

20

-2

8

¿Dónde colocarías los paréntesis para obtener las respuestas escritas arriba?

Cálculo de la Semana Santa

Los días de Semana Santa varían de un año a otro y se calculan a partir de las fases de la Luna. (El Sol, la Luna y la Tierra están alineados sólo una vez cada diecinueve años. Los años intermedios constituyen las 19 fases de la Luna.) Las operaciones para calcular qué día es el Sábado Santo aparecen abajo. Es un proceso largo con muchos pasos; las letras representan las respuestas y los restos que se obtienen en cada paso. Para empezar los cálculos sólo necesitas saber Y (el año). Trata de calcular cuándo será Semana Santa el próximo año*.

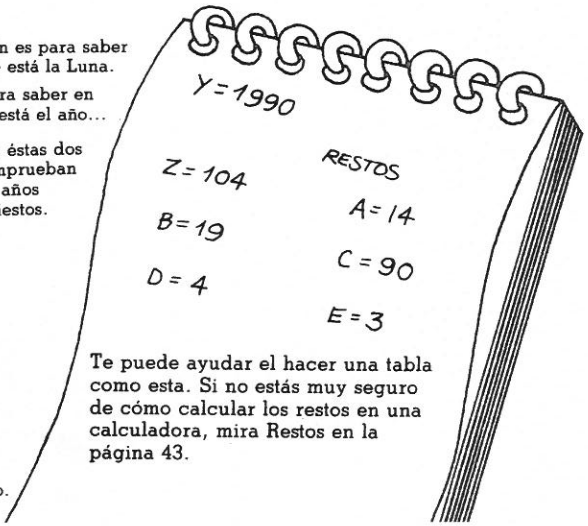
Y ÷ 19 = Z, resto A
Y ÷ 100 = B, resto C
B ÷ 4 = D, resto E
(B + 8) ÷ 25 = F, resto G
(B + 1—F) ÷ 3 = H, resto I
(19 × A) + (B + 15)—(D + H) = J
J ÷ 30 = K, resto L
C ÷ 4 = M, resto N
(2 × E) + (2 × M) + 32—(L + N) = P
P ÷ 7 = Q, resto R
A + (11 × L) + (22 × R) = S
S ÷ 451 = T, resto U
(L + R + 114)—(7 × T) = V
V ÷ 31 = W, resto X

W es el mes, X es el día, e Y, el año.

Esta división es para saber en qué fase está la Luna.

Esta es para saber en qué siglo está el año...

...y éstas dos comprueban los años bisiestos.



Te puede ayudar el hacer una tabla como esta. Si no estás muy seguro de cómo calcular los restos en una calculadora, mira Restos en la página 43.

---

* Puedes comprobar la respuesta en un diario.

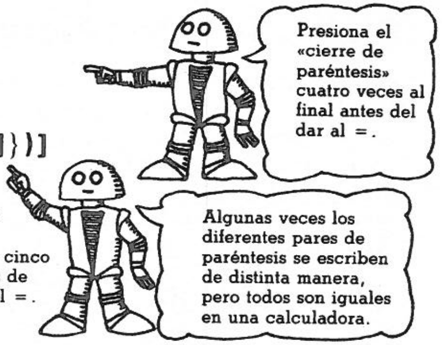
Paréntesis dentro de paréntesis

1. 10 ÷ (10 ÷ (10 ÷ (10 ÷ (10 ÷ 10))))

2. 10 × [10 ÷ (10 × {10 ÷ [10 × (10 ÷ 10)]}))]

3. $$\frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{(1+1)}\right)\right)}\right)\right)}$$

← Presiona el «cierre de paréntesis» cinco veces antes de presionar el =.



¿Puedes desenmarañar estas operaciones? La regla para trabajar con varios paréntesis es la de hacer la operación del paréntesis más interno y operar hacia afuera. En una calculadora con tecla para paréntesis se introducen en el orden en que están escritos, porque al presionar «abrir paréntesis» la calculadora no opera hasta que no se presiona la tecla de «cerrar paréntesis».

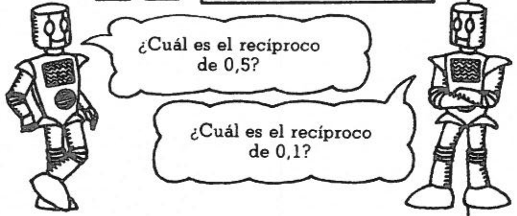
Recíprocos

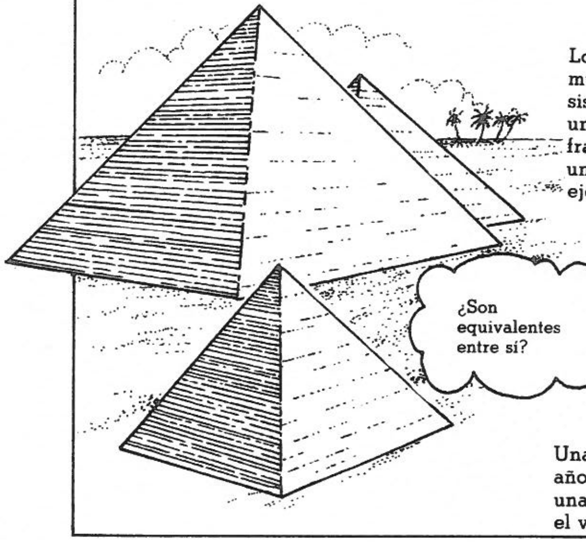
El recíproco de un número es 1 dividido por ese número; así, $^1/_3$ es el recíproco de 3, y $^1/_5$ lo es de 5. Los recíprocos son fracciones simples donde el numerador es 1 *(fracciones unidad)* y se dan a menudo en las operaciones, por lo que muchas de las calculadoras científicas tienen una tecla especial para calcularlos. La tecla del recíproco divide 1 por el número que has introducido y lo expresa en forma de decimal. Puedes ver cómo funciona a la derecha.

Tecla del recíproco

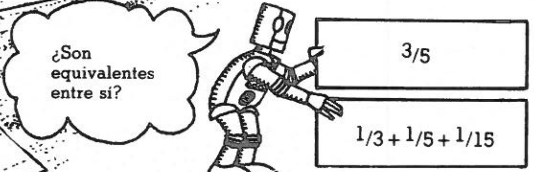
3 1/x 0.3333333

5 1/x 0.2



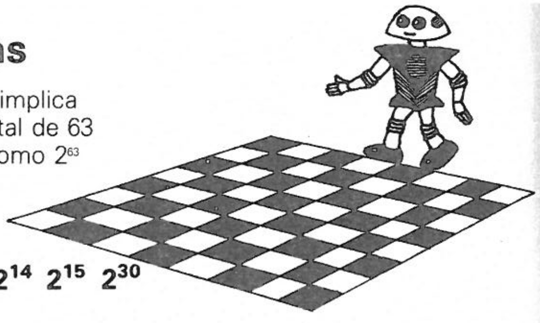


Los antiguos egipcios habían encontrado muy útil la tecla del recíproco, ya que su sistema numérico sólo usaba fracciones de uno, tales como $^1/_5$. Ellos no escribían fracciones como $^3/_5$ y lo expresaban como una suma de fracciones de uno; por ejemplo, $^1/_3 + ^1/_5 + ^1/_{15}$.



Una inscripción en un papiro egipcio del año 1650 a. C. calcula la pendiente de una pirámide como ½ + $^1/_5$ + $^1/_{50}$. ¿Cuál es el valor?

Problemas de potencias



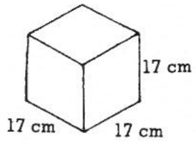
La solución al problema de la página 29 implica multiplicar por 2 por 2 por 2 hasta un total de 63 veces. Las matemáticas expresan esto como 2^{63} (2 a la potencia de 63).

Potencias en una calculadora

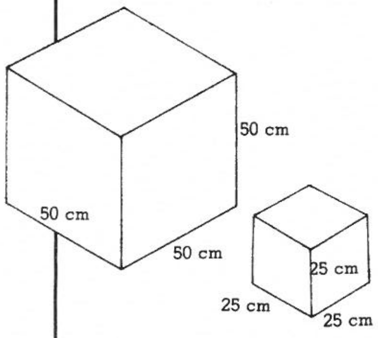
$\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$ $\boxed{128}$ 7^2 2^{14} 2^{15} 2^{30}

En una calculadora científica puedes usar la tecla marcada con y^x para multiplicar un número por sí mismo. De hecho, el número de granos de arroz en el octavo cuadrado del tablero de ajedrez es de 2^7, y puedes calcular esto presionando las teclas indicadas arriba. ¿Puedes calcular las otras potencias indicadas? Si tu calculadora no tiene tecla para potencias, usa la constante para multiplicar números por ellos mismos.

Problemas con potencias



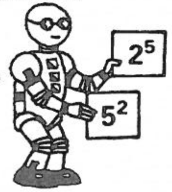
En matemáticas hay muchos problemas en los cuales necesitas estar multiplicando siempre por el mismo número. Los más comunes implican el cálculo de áreas y volúmenes. De hecho, la caja de arriba mide 17 cm. por 17 cm. y por 17 cm. Su volumen es, por tanto, de 17^3 ml. (1 mililitro = 1 centímetro cúbico).

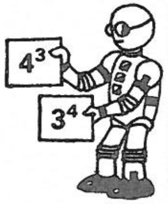


¿Puedes hallar el volumen en litros de estas dos cajas? ¿Cuántas veces mayor es el volumen de la caja grande?

¿Cuál es más grande?

¿Es 2^5 más grande que 5^2? ¿Es 4^3 más grande que 3^4?

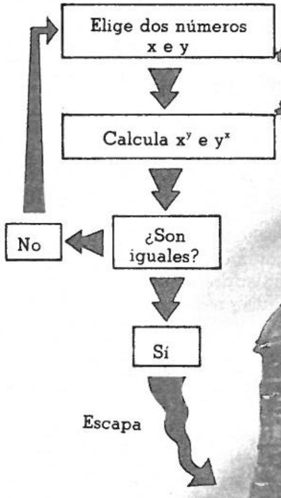




La huida de Leila

Leila sólo puede escapar de la torre si encuentra un par de números que cumplan que $x^y = y^x$. ¿Puedes ayudarla?

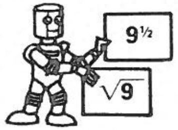
Ayuda

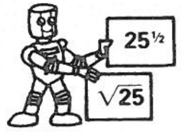


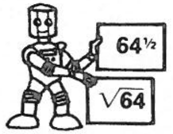
Potencias fraccionadas

Si tu calculadora tiene tecla para potencias puedes hallar «potencias fraccionadas» como $9^{1/2}$; las teclas que debes presionar para hacer $9^{1/2}$ se muestran a la derecha. ¿Puedes hallar las potencias y raíces cuadradas indicadas abajo?

$\boxed{9}\ \boxed{y^x}\ \boxed{0}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$

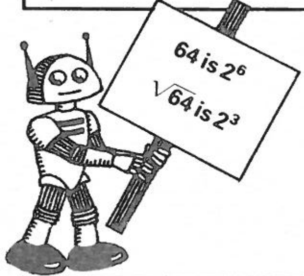






Los ejemplos de arriba demuestran que la raíz cuadrada de un número es lo mismo que elevarlo a «un medio». Por lo que $\sqrt{y}$ e $y^{1/2}$ son dos formas de escribir la misma cosa. De hecho, todas las raíces son potencias fraccionadas. Para hallar la raíz cuarta, por ejemplo, de 60 (eso es el número que multiplicado por sí mismo cuatro veces da 60) necesitas calcular $60^{1/4}$.

$\boxed{6}\ \boxed{0}\ \boxed{y^x}\ \boxed{0}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{2}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$ ← Para comprobar la respuesta, multiplicarla cuatro veces por sí misma.



Equivalencias entre raíces y potencias

¿Son las afirmaciones de los robots correctas? Puedes comprobarlo calculando las potencias y raíces cuadradas. Luego rellena los huecos de la tabla inferior.

$64 = 2^6$	$81 = 3^4$	$256 = 4^?$	$9 = 9^1$
$\sqrt{64} = 2^3$	$\sqrt{81} = 3^?$	$\sqrt{256} = 4^2$	$\sqrt{9} = 9^?$

1 Potencias en fracciones

$1/5^3$ $1/6^3$

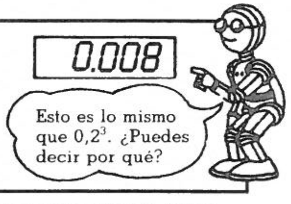
$1/9^2$ $1/10^4$

¿Puedes hallar el valor de estas fracciones que implican potencias? Recuerda que puedes usar la tecla del recíproco para dividir 1 entre el número.

2

5^{-3} $\boxed{5}\ \boxed{y^x}\ \boxed{-}\ \boxed{3}$ $\boxed{0.008}$

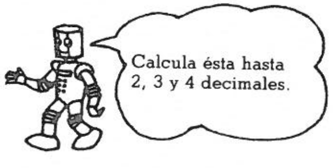
$\boxed{3}\ \boxed{+/-}$

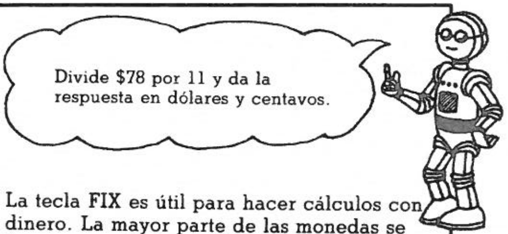


Otra forma de escribir una fracción con potencias es como una «potencia negativa». De hecho, $1/5^3$ es lo mismo que 5^{-3}, y $1/6^3$ es lo mismo que 6^{-3}. Puedes usar la tecla de potencias para calcular potencias negativas, dando las instrucciones como se indica arriba.

FIX

150 ÷ 7





Muchas calculadoras científicas tienen una tecla marcada FIX que hace que la calculadora redondee las respuestas hasta el número de decimales deseados. Para usarla se presiona FIX, luego el número de decimales que deseas antes de hacer los cálculos. Prueba con el ejemplo de arriba.

La tecla FIX es útil para hacer cálculos con dinero. La mayor parte de las monedas se basan en unidades de 100 (un dólar son 100 centavos, una libra inglesa son 100 peniques y un franco francés son 100 céntimos), por lo que debes redondear las respuestas a dos decimales.

---

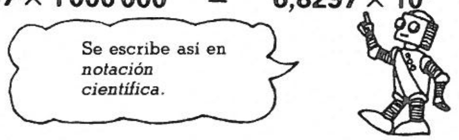
* En algunas calculadoras es x^y.

* Ver página 34 si tu calculadora te da las respuestas en notación científica.

Más acerca de números largos

Para reflejar números largos en una calculadora científica usa el sistema llamado *Forma standard o notación científica.* Usa el hecho de que un número como 300.000.000.000.000 (trescientos millones de millón) también puede escribirse como 3 × 100.000.000.000.000, o para evitar escribir tantos ceros 3×10^{14}.

$$6\,829\,700 \quad = \quad 6{,}8297 \times 1\,000\,000 \quad = \quad 6{,}8297 \times 10^{6}$$



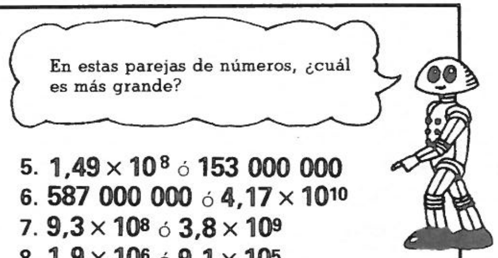
En *notación científica* un número se expresa siempre como un número entre 1 y 10 multiplicado por una potencia de 10, como se indica en el ejemplo de arriba.

Número entre 1 y 10

Potencia de 10

Transformación de números

¿Puedes pasar estos números a *notación científica*?

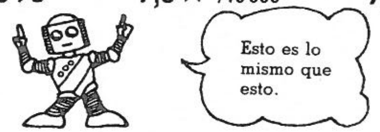


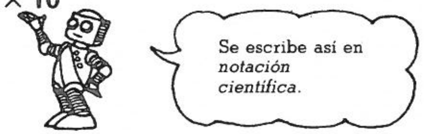
1. **743 800 000 000**
2. **9 230 000 000**
3. **802 000 000 000**
4. **45 320 000 000**
5. **$1{,}49 \times 10^{8}$** ó **153 000 000**
6. **587 000 000** ó **$4{,}17 \times 10^{10}$**
7. **$9{,}3 \times 10^{8}$** ó **$3{,}8 \times 10^{9}$**
8. **$1{,}9 \times 10^{6}$** ó **$9{,}1 \times 10^{5}$**

Números muy pequeños

La clave científica también se usa para expresar números muy pequeños. Estos aparecen a menudo en microbiología. De hecho, las células vivas más pequeñas son un tipo de bacterias que tienen un diámetro de 0,000025 mm. Las células sanguíneas tienen un diámetro de 0,00075 mm.

$$0{,}000\,75 \quad = \quad 7{,}5 \times {}^{1}/_{10\,000} \quad = \quad 7{,}5 \times 10^{-4}$$





Cuando se escriben números muy pequeños en *notación científica,* la potencia de 10 es negativa, porque multiplicar por una potencia negativa es lo mismo que dividir por una potencia (ver página 33).

Problema con números pequeños

¿Puedes ordenar estos de menor a mayor? (Los tamaños dados son diámetros.)

Bacteria de la pneumonía = 0,0001 mm.

Protozoo paramecium = 0,2 mm.

Virus de la gripe = 5×10^{-5} mm.

Virus de las paperas = 0,000225 mm.

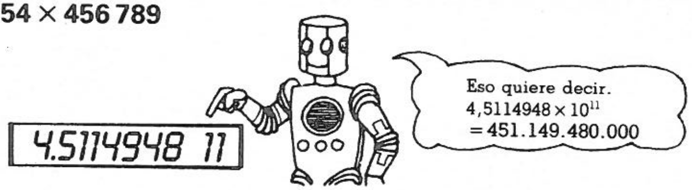
Molécula de la proteína de huevo blanco = 0,00001 mm.

Atomo de hidrógeno = 2×10^{-7} mm.

Punta de alfiler = 10^{-1} mm.

Notación científica en una calculadora

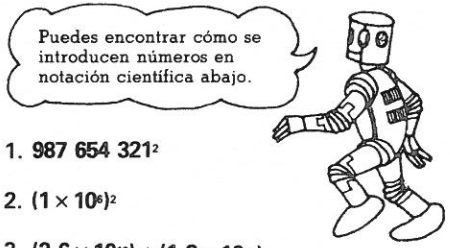
987 654 × 456 789



Si haces la operación superior en una calculadora científica te mostrará la respuesta en notación científica. El número de la derecha muestra la potencia a la que está elevado 10, y se llama exponente.

Problemas

Si tienes una calculadora científica, haz estos problemas y acertijos.



1. **$987\,654\,321^{2}$**

2. **$(1 \times 10^{6})^{2}$**

3. **$(2{,}6 \times 10^{16}) + (1{,}3 \times 10^{14})$**

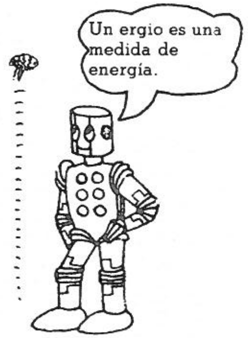
4. ¿Cuántas pulsaciones de corazón se realizan durante una vida? (La media es de 70 pulsaciones por minuto.)

5. La luz viaja a una velocidad de $2{,}998 \times 10^{5}$ km/seg. ¿Qué distancia es un año luz? (La distancia recorrida por un rayo de luz en un año.)

6. $7{,}5 \times 10^{-4}$ mm. es el diámetro de las células sanguíneas. ¿Cuántas veces más grande es que una bacteria que tiene $2{,}5 \times 10^{-5}$ mm. de diámetro?

7. ¿Cuántas veces mayor es el virus de la gripe que un átomo de hidrógeno? (Sus tamaños se dan en «problemas con números pequeños» a la izquierda.)

8. Las pulgas son muy buenas saltando; la fuerza del salto de una pulga es de 2×10^{7} ergios por gramo y por segundo. Si un adulto puede saltar 1,75 metros, ¿qué altura alcanzará una pulga del mismo peso?



Entrada de números en notación científica

$2{,}6 \times 10^{16}$

Tecla del exponente

$\boxed{2}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{6}\ \boxed{\text{EXP}}\ \boxed{1}\ \boxed{6}$

Estas son las teclas que se presionan para introducir un número en notación científica. Cuando presionas EXP la calculadora espera que el siguiente número sea una potencia de 10.

$7{,}5 \times 10^{-4}$

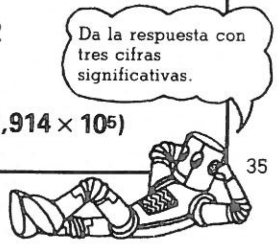
$\boxed{7}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{5}\ \boxed{\text{EXP}}\ \boxed{4}\ \boxed{+/-}$

Los números muy pequeños tienen una potencia negativa. Para introducirla tienes que presionar después de la potencia la tecla de cambio de signo, como ves aquí.

Tecla SCI

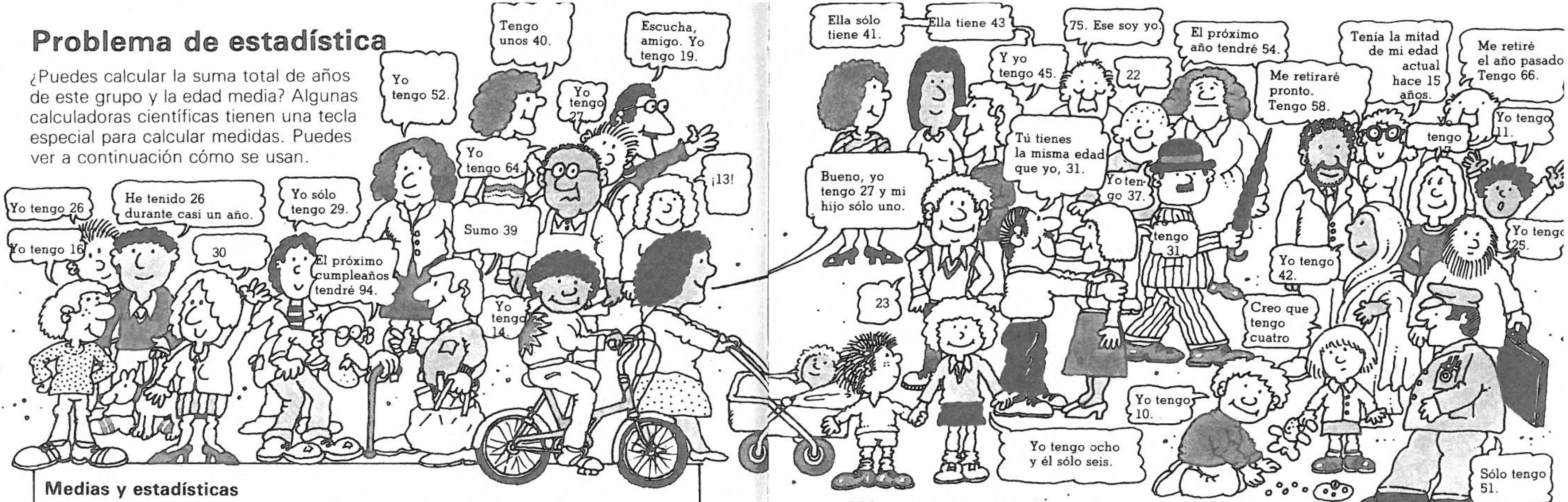
Muchas calculadoras tienen una tecla SCI, que hace que la calculadora exprese sus respuestas en notación científica. A pesar de todo, debes indicar el número de cifras significativas que debe tener la respuesta. Para hacer esto presiona SCI; luego, el número de cifras significativas que desees antes de hacer las operaciones. Si tu calculadora tiene SCI, haz las siguientes operaciones.

1. **267,45 ÷ 17,862**
2. **114 ÷ 21,68**
3. **29 764 × 3 968**
4. **$(2{,}96 \times 10^{3}) \div (8{,}914 \times 10^{5})$**



Problema de estadística

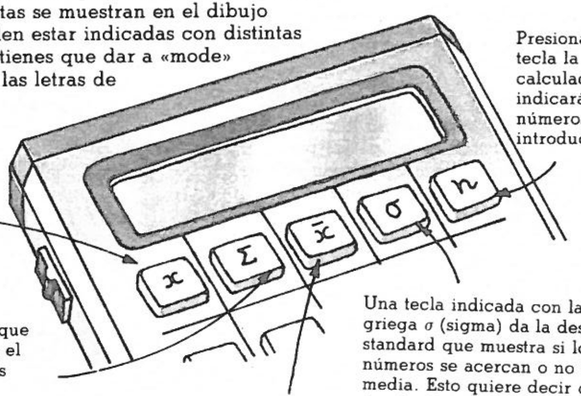
¿Puedes calcular la suma total de años de este grupo y la edad media? Algunas calculadoras científicas tienen una tecla especial para calcular medidas. Puedes ver a continuación cómo se usan.



Medias y estadísticas

Las medias pertenecen a una rama de las matemáticas llamada estadística, que fue desarrollada para analizar información sobre un grupo grande de personas o cosas. Los gobiernos e industrias utilizan estadísticas para hacer planes. Analizan las cifras de hoy y las usan para hacer predicciones sobre el futuro. Las estadísticas son tan importantes que existen calculadoras especialmente diseñadas para hacerlas, y muchas calculadoras científicas tienen unas teclas especiales para estadísticas.

Las más sencillas de éstas se muestran en el dibujo de abajo (aunque pueden estar indicadas con distintas letras). En la mayoría, tienes que dar a «mode» antes de poder utilizar las letras de estadísticas.



Presionando esta tecla la calculadora indicará cuántos números has introducido.

Esta tecla es para introducir números cuando se están haciendo estadísticas. Se presiona después de dar al número.

Este «sumatorio» hace que la calculadora muestre el total que se lleva de los números introducidos.

Esta es la tecla que da la media de los números que has introducido (divide el total, Σ, por el número de entradas, n).

Una tecla indicada con la letra griega σ (sigma) da la desviación standard que muestra si los números se acercan o no a la media. Esto quiere decir que si la desviación standard es grande, entonces es que los números son muy diferentes. Si es pequeño, es que se aproximan mucho a la media.

Fila 1	46	65	53	61	49	52	57	48	51	60	52
Fila 2	103	17	29	93	11	18	59	89	7	126	

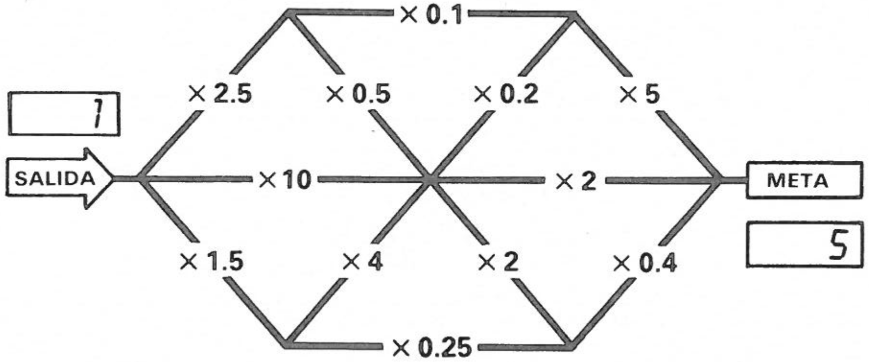
Si tu calculadora tiene teclas de estadísticas, intenta averiguar el sumatorio, la media y la desviación standard de estas dos filas de arriba.

Más preguntas sobre estadística

1. En ese dibujo hay más personas con menos de treinta años que sobre los treinta. ¿Por qué la media no está por debajo de treinta?
2. Asumiendo que este ejemplo sea representativo de la población, ¿qué porcentaje está encima de los sesenta y qué porcentaje por debajo de los veinte?
3. De acuerdo con este ejemplo, ¿qué proporción de programas de TV debería haber para niños por debajo de los diez?

Laberinto decimal

Para salir de las estadísticas. Intenta salir de este laberinto. Empieza con un 1 en tu calculadora, y según vayas pasando por cada camino debes multiplicar por el número que se indica en él. Debes terminar con un cinco en la pantalla y sólo puedes pasar una vez por cada tramo, pero puede hacerse en cualquier dirección.



¿Probable o improbable?

Una rama de las matemáticas muy relacionada con las estadísticas es la de probabilidades. Todos los que toman decisiones sobre su futuro puede que necesiten saber con qué frecuencia ocurre un hecho. Por ejemplo, antes de construir una barrera contra inundaciones es necesario saber la posibilidad de que el río se desborde. Existen fórmulas matemáticas para calcular la probabilidad, pero sólo pueden servir como guía. La probabilidad de conseguir cruz cuando se lanza una moneda es de 50-50, que es lo mismo que 1 de 2 o ½, pero no se obtiene en realidad cruces en un número mitad en el número de veces que la lanzas —puedes obtener cinco cruces seguidas—. A pesar de todo, si tiras una moneda 100 veces debes esperar que salga entre 45 a 55 veces (a pesar de que no puedes estar seguro).

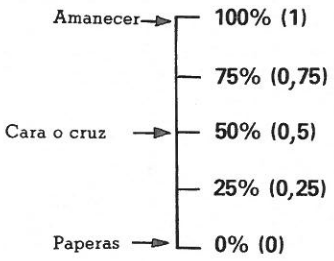
Hay cuatro ases en un paquete de 52 cartas, por lo que la probabilidad de obtener un as es $^4/_{52}$.

$^4/_{52}$ = **0,076 923**, esto es **0,08**

Esto es una probabilidad muy pequeña. ¿Cuál es la probabilidad de obtener *diamantes*?

Escala de probabilidades

La probabilidad puede expresarse como una fracción o como un decimal o como un porcentaje. Si un hecho es casi certero (por ejemplo, el que amanezca mañana), su probabilidad es casi 1 o 100%. Si un hecho es poco probable (por ejemplo, que mañana tengas paperas), la probabilidad es cercana a 0 o 0%. ¿En qué lugar de la escala irían los hechos siguientes?

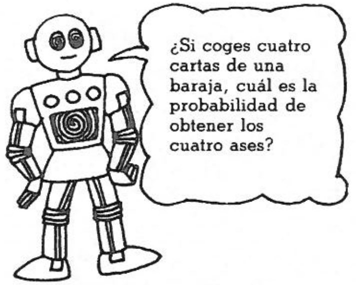


Multiplicación de probabilidades

$$^4/_{52} \times {}^{13}/_{52} = 0{,}019$$

Si se considera la probabilidad de que dos hechos ocurran al mismo tiempo, debes multiplicar las probabilidades obtenidas de cada uno por separado. De hecho, la probabilidad de coger un as de un paquete de cartas es $^4/_{52}$. El coger diamantes es de $^{13}/_{52}$. Para que ambas cosas ocurran (coger el as de diamantes) la probabilidad es $^4/_{52} \times {}^{13}/_{52}$.

Problema de ases

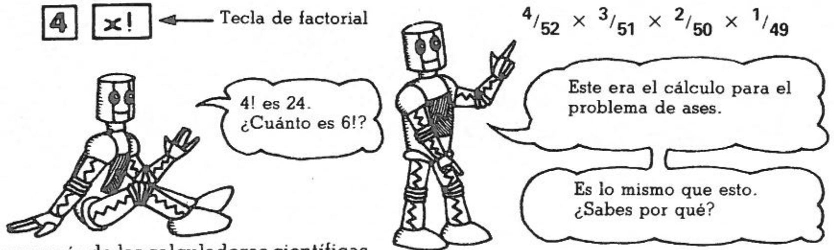


La probabilidad de que la primera carta sea un as es de $^4/_{52}$. Si se acertara, habría entonces 51 cartas con los tres ases que faltan, por lo que la probabilidad de sacar otro será de $^3/_{51}$. Si la segunda es otro as, habría 50 cartas con 2 ases, y la probabilidad sería $^2/_{50}$. La probabilidad de obtener el cuarto as será $^1/_{49}$. La probabilidad de obtener los cuatro ases será:

$$^4/_{52} \times {}^3/_{51} \times {}^2/_{50} \times {}^1/_{49}$$

Factoriales

Al multiplicar probabilidades a menudo se crean secuencias de números, como $4 \times 3 \times 2 \times 1$ o $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$. A esto se le llama factoriales y se escribe 4! y 6!



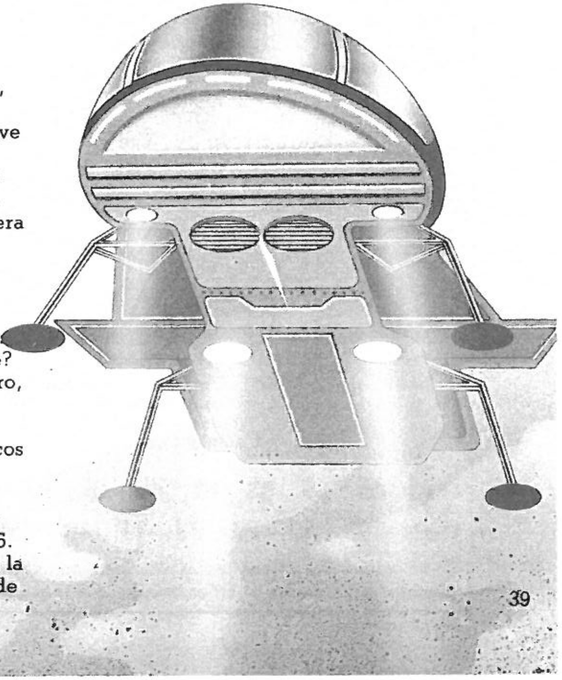
$$^4/_{52} \times {}^3/_{51} \times {}^2/_{50} \times {}^1/_{49}$$

$$\frac{4! \times 48!}{52!}$$

La mayoría de las calculadoras científicas tienen una tecla marcada X, que trabaja factoriales automáticamente. Puedes ver cómo funciona arriba.

Sumando probabilidades de que ocurra

Si un resultado depende de un hecho u otro, necesitas sumar sus probabilidades por separado. De hecho, el aterrizaje de esta nave podría ser un desastre si la superficie del planeta fuese muy blanda, o la velocidad de aterrizaje fuese muy elevada, o si la nave se calienta excesivamente al entrar en la atmósfera del planeta, o si su motor falla.



Problema

Dadas las probabilidades siguientes, ¿puedes averiguar qué seguridad hay en el aterrizaje? Si el peligro es superior a uno de cada cuatro, el aterrizaje debe ser abortado.

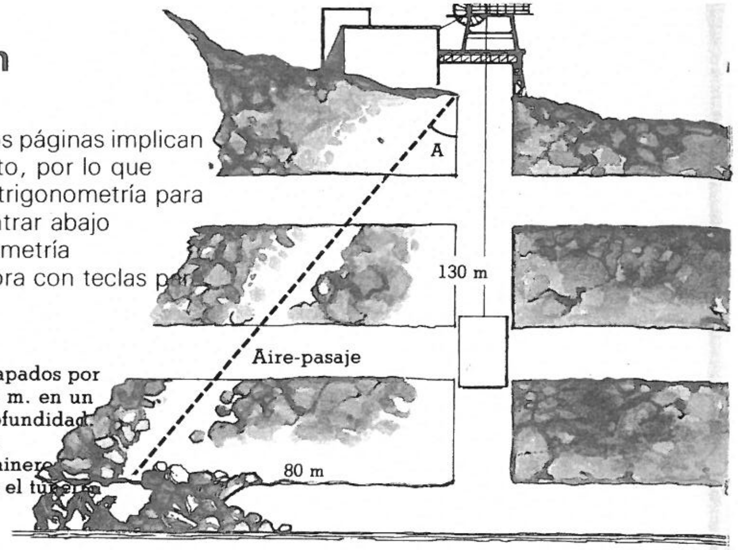
1. La probabilidad calculada por los científicos de que el suelo sea demasiado blando es de una de cada cinco.
2. La velocidad de aterrizaje sólo puede ser predecida con una previsión de uno entre 35.
3. Hay una probabilidad de entre 60 de que la nave se recaliente, pero las probabilidades de que el motor falle es de una entre 200.

Problemas con triángulos

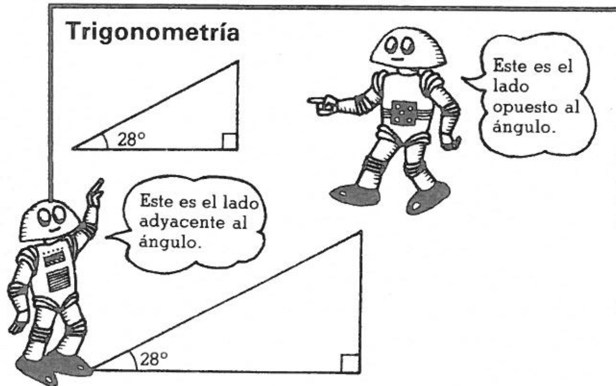
Los problemas de estas dos páginas implican triángulos con ángulo recto, por lo que puedes usar las reglas de trigonometría para resolverlos. Puedes encontrar abajo información sobre trigonometría (necesitarás una calculadora con teclas para sen, cos y tan).

Rescate número

Algunos números han sido atrapados por una explosión a lo largo de 80 m. en un túnel que está a 130 m. de profundidad. Se tiene que abrir un túnel de emergencia que llegue a los mineros. ¿Qué ángulo tiene que formar el túnel?

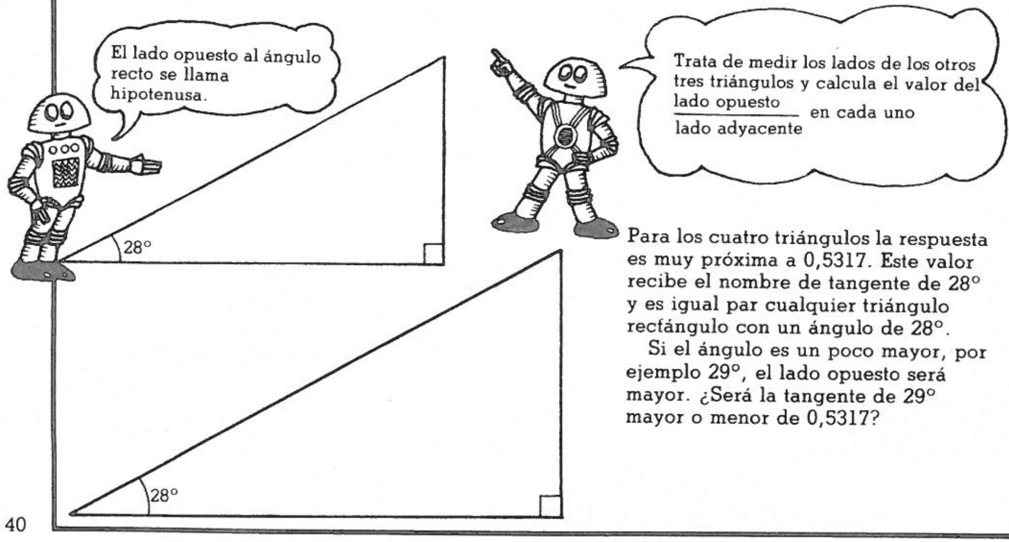


Trigonometría



La trigonometría significa medir ángulos. Se basa en tres factores sobre triángulos rectángulos que puedes hallar tú mismo. Cada uno de los triángulos de la izquierda tienen un ángulo de 28°. En el más pequeño el lado adyacente al ángulo 28° es de 2,5 cm. de longitud y el lado opuesto es de 1,3 cm.; es decir, casi la mitad.

1,3 ÷ 2,5 = 0,52

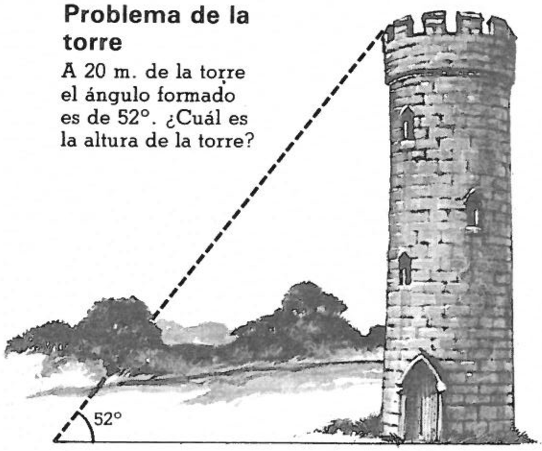


Para los cuatro triángulos la respuesta es muy próxima a 0,5317. Este valor recibe el nombre de tangente de 28° y es igual par cualquier triángulo rectángulo con un ángulo de 28°.

Si el ángulo es un poco mayor, por ejemplo 29°, el lado opuesto será mayor. ¿Será la tangente de 29° mayor o menor de 0,5317?

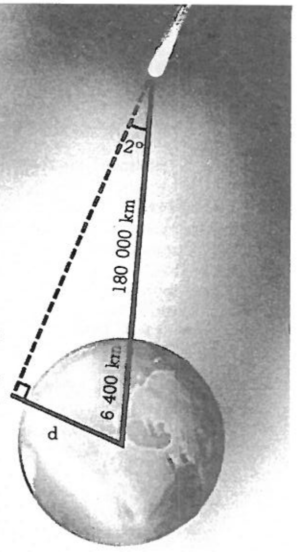
Problema de la torre

A 20 m. de la torre el ángulo formado es de 52°. ¿Cuál es la altura de la torre?



Alarma cometa

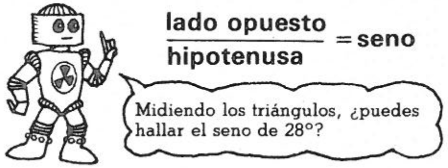
Un cometa desconocido se está acercando rápidamente a la Tierra. Se estima que está a 180.000 km. de distancia y viaja con un ángulo solo de 2°. Recordando que el radio de la Tierra es de 6.400 km. ¿Colisionará el cometa con la Tierra?

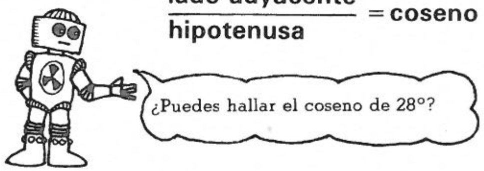


Senos y cosenos

También puedes calcular el $\frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ o $\frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ en los cuatro triángulos. Cada uno de estos resultados es también un valor constante. Los valores o ratios se llaman senos y cosenos del ángulo 28°.

$$\frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \text{seno} \qquad \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \text{coseno}$$





Usos de la trigonometría

Los tres ratios, seno, coseno y tangente, son útiles porque permiten que los astronautas y astrónomos calculen distancias o ángulos que son difíciles o casi imposibles de medir. Las calculadoras científicas tienen las teclas que dan automáticamente el seno, coseno y tangente de cualquier ángulo. Si tienes una calculadora científica, comprueba este ejemplo.

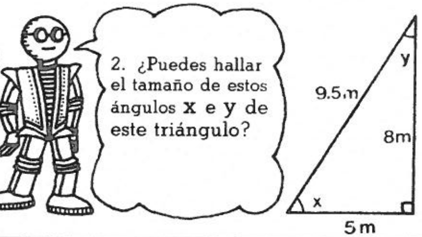
3 2 tan 0.6248693

Una calculadora científica también puede invertir el proceso y dar el ángulo si introduces el valor del seno, coseno o tangente. Para hacer esto debes presionar la tecla de la inversa antes que la del seno, coseno o tangente. El ejemplo de abajo muestra las teclas que debes presionar para encontrar el ángulo cuya tangente es 0,5317.

0 · 5 3 1 7 INV tan

27.999578

Problemas de trigonometría



---

* Un ratio es una forma de expresar la relación entre dos números dividiendo uno por el otro.

Soluciones

Página 3

1. Puedes hacer 12 con sólo cinco presiones (11+1=).
2. El número 1 aparece 21 veces entre 1 y 100.

Página 4

Problemas con el teclado

1. Sumando todos los números de 1 a 20 da un total de 210. Si lo hiciste en menos de veinticinco segundos fuiste muy rápido.

Otra forma más rápida de hacerlo, los números entre 1 y 20 pueden dividirse en parejas; cada uno de ellos suma 21 (1+20, 2+19, y así sucesivamente). Hay 10 parejas; por tanto, la contestación es 10×21=210.

2. La siguiente operación hará que aparezca en la calculadora 100 con tan sólo 10 presiones:
37+73—7—3=.

3. Esta es la operación para obtener 1.001 con nueve presiones:
72×7×2—7=.

4. Los números enteros que dividen exactamente a 1.001 son 7, 11, 13, 77, 91, 143. Se llaman divisores de 1.001.

5. Las teclas de operaciones son —y x (87—19×31=2.108).

6. La operación completa es 48×73=3.504.

7. Las dos posibles operaciones son 93×86=7.998 y 83×86=7.138.

Página 5

Operaciones con resta

La respuesta es siempre 111 si restas las columnas de números, porque cada número en el teclado es 1 mayor que el que está a la izquierda.

Al restar las filas de números obtienes siempre 333, porque cada número es tres veces mayor que el anterior.

Parejas

Cuando restas los dos números la diferencia es siempre de 27. Esto es porque para cada par de teclas la diferencia entre los números es siempre tres. Cuando combinas las dos cifras, por ejemplo 4 y 1, formas 41 y 14; la diferencia entre las «decenas» es siempre 30 y la diferencia entre unidades es siempre —3, por lo que la diferencia de combinación es de 27.

Los números (ejemplo: 41 y 14) suman siempre un múltiplo de 11, porque la suma de dieces es siempre la misma, al igual que la suma de unidades (4+1=5 y 1+4=5). En números menores a 100, si los dieces y unidades son los mismos el número es divisible por 11, porque 11 es un 10 y una unidad.

Vecinos

Los cinco números que no pueden formarse son 8, 12, 14, 16 y 19. Usando vecinos diagonales puedes formar 8 (5+3), 12 (6×2) y 14 (8+6), pero 16 y 19 siguen si poderse formar.

Página 6

Autopista espacial

Para moverse a lo largo de la autopista los números que necesitas añadir y restar son: —600; +4.000; +1; +900; +20; —9.000; +2; —1.000; +9; +80; +9; +600; +7; +70; —9; —90; +5.000; +1.

Página 7

¿Cuál es el valor?

1. El valor de 4 en 36.417 es 400. Si necesitas comprobar, resta 400 de 36.417 en la calculadora.
El valor de 4 en 29.149 es 40.
El valor de 4 en 42.613 es 40.000.
2. La diferencia entre 4.762 y 4.062 es 700.
3. La diferencia entre 472 y 402 es 70.

Operaciones equivalentes

Las operaciones equivalentes son A, C e I; B, E y J; D y G; F y H.

Página 8

¿Cuál es más cercano?

1. A es más cercano.
2. C es más cercano.
3. C es más cercano.
Una forma de calcular la respuesta es la de redondear los números en la operación al 10 más próximo (o 100 o 1.000), de forma que puedas hacer la operación mentalmente.
Por ejemplo, en el primer ejemplo 97×49 es cerca de 100×50.

Busca los errores

La tercera operación es correcta. La versión correcta de las otras operaciones se muestra abajo.
1. 987×3=2.961, por lo que se presionó la tecla 6 en vez de la 3.
2. 1.629×1.332=2.961, por lo que fue presionado el — en vez del +.
4. 423×7=2.961, por lo que fue presionado 432 en vez de 423.

Hasta cero

Cualquier número de cuatro cifras puede ser reducido a cero en cuatro etapas usando el método mostrado en el ejemplo.
1. Restar las dos últimas cifras.
2. Divide por las dos primeras cifras (esto da siempre una respuesta de 100).
3. Resta 50.
4. Resta 50 otra vez.

Carrera hasta el 1

Esta es la operación para reducir 28 a 1 en tres pasos, usando la tecla del 3.
Aquí hay algunas sugerencias para reducir otros números.
55-66+6+6=1
40+5+5+5÷55=1
27-7×7+7+7-77÷77=1

Página 9

Números consecutivos

1. 15+16+17+18=66; 2. 34×35=1.190;
3. 7×8×9=504.

Inversión

En cada caso el número que tienes que restar es una combinación de números múltiplos del 9; por ejemplo, 272.727 o 454.545. El múltiplo de 9 depende de la diferencia entre los dígitos de partida. Por ejemplo, la diferencia entre 8 y 3 es 5, 5×9=45, y el número que necesitas restar a 838.383 es 454.545.

Página 10

Truco para dividir

El truco podría ser: «Introduce un número de cuatro cifras. Repítelo para formar un número de ocho cifras. Divide por 73 y luego por 137».

Restos

Para calcular el resto en la respuesta de una calculadora necesitas restar la parte de la respuesta anterior a la coma. Luego multiplica la parte posterior a la coma por el número que has dividido, como aparece abajo.

1.001=5=200,2
—200= 0,2 Este es
×5= 1 el resto.

Emparejamiento

17÷2=8,5; 107÷10=10,7; 100÷8=12,5; 37÷4=9,25; 8÷16=0,5; 12÷48=0,25; 54÷12=4,5; 10÷8=1,25.

Página 11

Más problemas de emparejamiento

30÷7=4,285 714 2; 26÷11=2,363 636 3; 10÷3=3,333 333 3; 17÷4=4,25; 5÷18=0,277 777 7; 9÷16=0,562 5.

¿Cuál es el mayor?

Estas son las respuestas a las operaciones y la cartulina a la que pertenece: 7÷3=2,333 333 3; cartulina b: 49÷19=2,578 947 3; cartulina C: 440÷200=2,2; cartulina A.

Página 12

Ordenación de fracciones

Empezando por la más pequeña, el orden de las fracciones es: $^{1}/_{5}$ (=0,2), $^{104}/_{498}$ (=0,208 835 3), $^{225}/_{1.042}$ (=0,215 930 9), $^{18}/_{79}$ (0,227 847 1), $^{7}/_{30}$ (=0,233 333 3), $^{41}/_{170}$ (0,241 176 4).

Página 13

Fracción perdida

La operación del robot era: 3÷13=0,230.769.2.

Numerador y denominador

$^{6}/_{11}$ 0,545 454 5, que es más que 0,5.

Buscar la secuencia

Las primeras cifras para $^{1}/_{7}$ son 0,142 857 142 857. 0,058 823 529 411 764 7, y $^{6}/_{17}$ es 0,352 941 176 470 588 2.

Fracciones simplificadas

$^{3}/_{10}\times 2^{1}/_{2}$=0,75; $^{1}/_{2}\div {}^{1}/_{4}$=2; $^{3}/_{5}\times {}^{4}/_{7}$ =0,342 857 1; $5^{1}/_{8}$-$^{3}/_{4}$=1,375; $^{7}/_{8}$+$^{3}/_{4}$= 1,625; ½×½ = 0,25.

Página 14

Siendo preciso

1. Un año luz es casi 6 millones de millón (6.000.000.000.000) de millas o más de 9 millones de millón (9.000.000.000.000) de kilómetros.
2. Hay más de 30 millones (30.000.000) de gatos en EE. UU.
3. La población de Londres es casi 7 millones.
4. La calle más corta es casi 17½ metros de longitud.

Al redondear las afirmaciones, se simplifican y te ayudan a comprender su auténtica magnitud.

Problemas

1. El tren moderno es casi nueve veces más rápido que el poseedor del récord de 1829.
2. Le llevará al tren completar el viaje más de tres días.
3. Si un millón de horas son 41.666,66 días, que son alrededor de 114 años, a menos que seas muy muy viejo, la respuesta es no.

Aproximación de las tres últimas cifras

Redondeados hasta tres cifras significativas los cuatro primeros números son: **1.** 0,006 38; **2.** 0,062 9; **3.** 264; **4.** 781 000.

En el ejemplo 5 el número 0,199 999 9 no puede redondearse. Se convierte en 0,200, que es 0,2.

Página 15

Problemas espaciales

1. El viaje de la nave llevaría 240.000 segundos; es decir, 4.000 minutos o 66,666 666 horas por lo que tu respuesta sería «casi 67 horas». Puede que hayas calculado 2,777 777 7 días, por lo que tu respuesta sería «un poco más de $2^{3}/_{4}$ días o «un poco más de 2 días y 18 horas».
2. La nave llegará a Marte después de 58 días.
3. El Sol es aproximadamente 400 veces mayor que la Luna. Parece ser del mismo tamaño, porque está 400 veces más lejos.

Página 16

Repeticiones

1. La respuesta 11, 111, 1.111, 11.111.

Para que te hagas una idea de por qué se forma esta secuencia, mira una de las operaciones; por ejemplo: 1.234×9+5. 1.234×9 es equivalente a:
1.000×9=9.000
+200×9=1.800
+30×9 270
+4×9= 36

En esta suma cada columna, excepto las unidades, suman 10. Sumando 5 a las unidades y llevándote 1 hace que cada columna sume 11. Las otras operaciones funcionan de igual forma.
2. La secuencia es 2.002, 3.003, 4.004, etcétera. La clave a esta secuencia es que 143×7=1.001. Podrías haber almacenado en la memoria 1.001, ya que tanto 143×7 aparece en todas las operaciones.
3. La secuencia de soluciones es 9, 98, 987, 9.876, etcétera. Para investigar cómo se forma, toma una de las operaciones; por ejemplo, 123×8+3, y sigue los mismos pasos que en la solución del ejemplo 1.

Página 17

Conversiones

85 km. son casi 53 millas; 126 km. son casi 79 millas; 100 km. son casi 63 millas; 32 km. son 20 millas; 50 km. son casi 31 millas; 10 km. son casi 6

millas; 270 km. son casi 169 millas; 115 km. son casi 72 millas.

Orden en las operaciones

285+117
=2,0510204
264—68

¿Quién gana?

La mujer tarda 90 segundos en terminar la carrera, eso es un minuto y 30 segundos, por lo que ella gana al caballo.

Página 18

Planetas boca-abajo

Para decodificar las soluciones pon boca abajo la calculadora y lee los números como letras. Empezando en la Tierra, el viaje es: Sol, Lilosi, Zigo, luego, Isis; Lesbos y Sibel a Gogol. El mensaje final en Gogol es «Captura EL SOL».

Página 19

Investigación de constantes

5. Diez presiones te aproximarán a 100.
6. El número en pantalla se hace cada vez más grande, porque estás restando un número negativo cada vez.
7. Necesitas presionar 9+ + = para obtener la tabla del nueve.

Problema de la planta

Después de 15 días la planta tendría 32.768 cm. de altura, que son más de 300 metros.

Página 20

Problemas de porcentajes

Si el 20% de la población de Brigg emigra, el número de personas que abandonan la isla es de 49.800 y el número que se queda es 199.200. Puedes comprobar tus respuestas sumándolas y ver si es igual a la población original.

20% de 4.000 = 800; 20% de 12,5 = 2,5;
90% de 8,9 = 8,01; 50% de 500 = 250.

Tabla de porcentajes

Esta es la tabla completa:

50%	$^{50}/_{100}$	½	0,5
25%	$^{25}/_{100}$	$^1/_4$	0,25
10%	$^{10}/_{100}$	$^1/_{10}$	0,1
$33^1/_3{}^0/_0$	$^{33,33}/_{100}$	$^1/_3$	0,3333
15%	$^{15}/_{100}$	$^3/_{20}$	0,15
$66^2/_3{}^0/_0$	$^{66,67}/_{100}$	$^2/_3$	0,6667

Porcentajes sin la tecla %

15% de 30 = 4,5; 50% de 50 = 25.

Página 21

Media vida

La radiactividad tardará siete días en bajar de las cuatro unidades. Tus cálculos deben mostrar que decrece de la siguiente forma: 463 → 231,5 → 115,75 → 57,9 → 28,9 → 14,5 → 7,23 → 3,62.

Orangután

El número de orangutanes caerá por debajo de los 2.500 después de cinco años. Tus cálculos deben mostrar lo siguiente: 5.000 → 4.250 → 3.613 → 3.071 → 2.610 → 2.219.

Ganando dinero

El 2.° método es mejor, aunque empieza siendo poco; produce al menos casi el doble al final. Con el método 1 consigues a los diez años 651 billetes, y por el método 2 obtienes 1.133.

Página 22

Cuadrados

$37^2 = 1.369$; $0,5^2 = 0,25$.

Problemas con cuadrados

1. En cada par, un número es el inverso del otro y sus cuadrados son también el inverso del otro; por ejemplo, $12^2 = 144$ y $21^2 = 441$. La misma cosa ocurre con otros números con las cifras 0, 1, 2 y 3. No funcionará con números con dígitos mayores, porque los cuadrados de los números mayores a 3 son mayores de 10 y el «llevarse» estropea la secuencia.
2. $1^2 = 1$; $11^2 = 121$; $111^2 = 12.321$; $1.111^2 = 1.234.321$. (Todos estos cuadrados son capicúas. Esto quiere decir que se leen igual de derecha a izquierda y viceversa.)
3. $5^2 =$ 25
$15^2 =$ 225
$25^2 =$ 625
$35^2 = 1.225$
$45^2 = 2.025$

En esta secuencia el cuadrado incrementa en 200, luego 400, 600 y 800, y el siguiente cuadrado (55^2) será 1.000 más; es decir, 3.025.
4. $25^2 + 26^2 = 1.301$.
5. $3^2 + 6^2 + 7^2 = 2^2 + 3^2 + 9^2$

Cada lado de esta ecuación suma 94, por lo que es verdad. Todas las demás no son ciertas.

Página 23

Triángulos antiguos

En el primer triángulo $9^2 + 12^2 = 225$ y $15^2 = 225$. El segundo triángulo también es rectangular, porque $8^2 + 6^2 = 100$ y $10^2 = 100$.

Triángulos rectángulos en la Edad de Piedra

Las medidas de la Edad de Piedra que dan ángulos rectos son:
3, 4, 5, porque $3^2 + 4^2 = 5^2$
8, 15, 17, porque $8^2 + 15^2 = 17^2$
5, 12, 13, porque $5^2 + 12^2 = 13^2$
12, 35, 37, porque $12^2 + 35^2 = 37^2$
Los otros están muy próximos:
$41^2 + 71^2 = 6.722$ y $82^2 = 6.724$
$19^2 + 59^2 = 3.842$ y $62^2 = 3.844$
$8^2 + 9^2 = 145$ y $2^2 = 144$

Problemas sobre Pitágoras

En el primer triángulo la longitud del tercer lado es 1,5 m., porque $1,5^2 + 3,6^2 = 3,9^2$. El segundo triángulo tiene dos de la misma longitud, por lo que el tercer lado debe ser 3,9 m.

Página 24

Opuestos

1. Las operaciones + y — son inversas una de otra, como lo son x y ÷.
2. Aquí están las operaciones con sus inversas: ×12 y ÷2; +17 y —17; —7 y +7; ÷10 y ×10.
3. La operación ×3 invierte el efecto de ÷3, pero con algunos números; por ejemplo, 14; la calculadora no puede dar una respuesta exacta cuando se divide por 3 (14 ÷ 3 = 4,6666666), por lo que cuando multiplicas por 3 el resultado no es exactamente 14, pero muy próximo (13,9999999).

Alternativas

Dos inversos de ÷0,5 son ×0,5 y ÷2.

Problemas de inversos

Estos son los pares de operaciones inversas: ×42 y ÷42; —0,5 y +0,5; +42 y —42; ÷5×8 y 8×5; ×1,6 y ×5÷8; +1,6 y —1,6; ×4,2 y ÷4,2.

Las operaciones ×1 y —0 no son realmente inversas, porque ambas hacen lo mismo (dejan el número igual). Las operaciones ÷0 y ×0 no tienen inverso, porque no es posible dividir por cero, y multiplicar un número por cero es reducir el número a nada.

Página 25

Raíces cuadradas

Si 16 es la raíz cuadrada, el número es 256.
Si 16 es el número, la raíz cuadrada es 4.
Si 256 es el número, 16 es la raíz cuadrada.

Raíces cuadradas sin la tecla $\sqrt{\ }$

$\sqrt{70} = 8,367$.

Página 26

Cálculos circulares

El valor chino de π (3,1415929) está más próximo al valor dado por computadora. Los otros valores son: Egipcio, 3,1604936; Babilónico, 3,125; Griego, 3,1462643; Arquímedes, entre 3,1428571 y 3,140845; Judío, 3,1416.

Uso de π

Una lata con 16 cm. de diámetro necesitará una etiqueta como mínimo de una longitud de 50,3 cm.

Problemas sobre la Tierra

Estas son las respuestas usando π como 3,142. Si usas un valor diferente, tus soluciones pueden variar ligeramente.

1. La circunferencia de la Tierra es de 39.700 km.

2. La longitud de la órbita del satélite es 40.343 km. La operación que necesitas hacer es $\pi \times 12.840$, porque el diámetro de la órbita es:
100 km. + 12.640 + 100 km = 12.840 km.

3. La banda alrededor del satélite es 15,7 m.

4. Si la banda se pusiera a 1 m. de distancia de la superficie del satélite, los 2 m. extra en el diámetro hará que la longitud de banda sea de 22 m.; es decir, 6,3 m. más larga.

5. La cuerda extra que se necesita para rodear el Ecuador a 1 m. de altura es también 6,3 m. La respuesta a esta y a la pregunta anterior es la misma, porque en cada caso añade 2 m. de diámetro, por lo que la circunferencia será $2 \times \pi$ más larga.

6. La nave viaja a 13.440 km. en una órbita de la Luna (es 8 × 1.680 km.). Para calcular a qué distancia está la órbita de la Luna debes averiguar el diámetro de la órbita. La circunferencia de la órbita es 13.440 km., por lo que $\pi \times$ el diámetro = 13.440 y el diámetro es, por tanto, 4.280, redondeando las decenas. El diámetro de la Luna es 3.480 km., por lo que la distancia de la nave a la Luna es ½ (4.280—3.480), eso es, cerca de 400 km.

División

Aquí hay algunos números de cinco cifras que comienzan con 7, que funcionan de igual forma que 38.125: 70.245, 72.605, 78.920, 76.520. Hay varios más.

Un ejemplo de número con seis cifras que funciona de la misma forma es 126.450 y con siete cifras es 3.216.549. El único número con nueve cifras que lo cumple es 381.654.729.

Página 28

Problemas con números grandes

2. Si divides la resta como se muestra a la derecha, la parte superior de una de las operaciones es más pequeña que la inferior.

Ejemplos

1. 32.707.793.946. **2.** 244.148.291. **3.** Necesitas dividir la suma en tres partes, la solución es: 2.184.354.064.327.273.546.

Página 29

Problema de ajedrez

El número de granos de arroz en el último de los cuadrados será, aproximadamente, 92.000.000.000.000.000.000. Esto es más arroz del que produce el mundo entero. Usando la constante ×2 en tu calculadora obtendrás en el octavo cuadrado 128 granos. El dieciseisavo cuadrado tendrá 32.768 granos. Después del veintisieteavo cuadrado, donde deberá haber 67 millones de granos de arroz, el número ya no cabe en la calculadora. Para continuar con los cálculos necesitas suprimir el desbordamiento o convertir el número en millones y volver a introducirlo (necesitas introducir también la constante).

Página 30

Ejemplos

1. 30; **2**. 130; **3**. 1; **4**. 40,75; **5**. 1,44; **6**. 2.

135 ÷ (15—6) + 5 = 20
135 ÷ 15—(6 + 5) = —2
(135 ÷ 15)—6 + 5 = 8

Página 31

Paréntesis dentro de paréntesis

1. 1; **2**. 10; **3**. 0,6.

Recíprocos

El recíproco de 0,5 es 2, y el recíproco de 0,1 es 10.

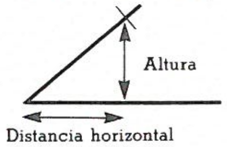
Las fracciones $^3/_5$ y $^1/_3 + ^1/_5 + ^1/_{15}$ son equivalentes, porque $^3/_5 = 0{,}6$ y $^1/_3 = 0{,}333\ 333\ 3$

$$^1/_5 = 0{,}2$$

$$^1/_{15} = \frac{0{,}066.666.6}{0{,}599.999.9}$$

La pirámide

La pendiente de la pirámide es 0,72. Este valor es el ratio en cualquier punto de la pendiente entre la altura y la distancia horizontal desde la esquina (el ratio es una forma de expresar las relaciones entre dos números dividiéndolos entre sí).



Los constructores egipcios se aseguraron de que las pendientes en las pirámides fuesen uniformes calculando el ratio de distancia horizontal (altura) de varios puntos de la pendiente y asegurándose de que siempre era igual.

Página 32

Potencias

$7^2 = 49$; $2^{14} = 16.384$; $2^{15} = 32.768$;
$2^{30} = 1.073.741.824$.

Problemas con potencias

El volumen de la caja pequeña es de 15,6 litros. El volumen de la caja grande es 125 litros, por lo que es ocho veces mayor que la más pequeña. Doblando la longitud, hace que el volumen sea ocho veces mayor, porque 8 es 2^3.

¿Cuál es mayor?

$2^5 = 32$; por tanto, es mayor que $5^2(=25)$.
$4^3 = 64$, por lo que es más pequeño que $3^4(=81)$.

Huida de Leila

Los números que Leila necesita son 2 y 4, porque $2^4 = 4^2$.

Página 33

Potencias fraccionadas

9½ y √9 son ambos 3; 25½ y √25 son ambos 5; 64½ y √64 son ambos 8.
$60^{1/4} = 2.783.157.7$

Estableciendo equivalencias

La tabla completa es

$64 = 2^6$	$81 = 3^4$	$256 = 4^4$	$9 = 9^1$
$\sqrt{64} = 2^3$	$\sqrt{81} = 3^2$	$\sqrt{256} = 4^2$	√9 = 9½

Potencias en fracciones

1. $^1/_{5^3} = 0{,}008$; $^1/_{6^3} = 0{,}0046296$; $^1/_{9^2} = 0{,}0123457$; $^1/_{10^4} = 0{,}0001$.
2. Los números 5^{-3} y $0{,}2^3$ son iguales, porque 5^{-3} es lo mismo que $^1/_{5^3}$, y $^1/_5 = 0{,}2$.

FIX

150 ÷ 7 = 21,43 (dos decimales); 21,429 (tres decimales); 21,4286 (cuatro decimales).

$78 ÷ 11 = $7 y 9 centavos.

Página 34

Transformación de números

1. $7{,}438 \times 10^{11}$;
2. $9{,}23 \times 10^9$;
3. $8{,}02 \times 10^{11}$;
4. $4{,}532 \times 10^{10}$;
5. 153.000.000 es $1{,}53 \times 10^8$, por lo que es mayor que $1{,}49 \times 10^8$.
6. $4{,}17^{10}$ es 41.700.000.000, que es mayor que 587.000.000.
7. $3{,}8 \times 10^9$ es cerca de cuatro veces mayor que $9{,}3 \times 10^8$.
8. $1{,}9 \times 10^6$ es cerca de 2.000.000, y $9{,}1 \times 10^5$ es inferior a 1.000.000.

Problemas con números pequeños

Empezando por el menor, el orden de tamaño es: átomo de hidrógeno, molécula de proteína de huevo blanco, virus de la gripe, bacteria de la pneumonia, virus de las paperas, punta de alfiler, protozoo paramecium.

Página 35

Problemas

1. $9{,}75 \times 10^{17}$; **2**. 1×10^{12}; **3**. 200.
4. Para una persona mayor de setenta años el número de pulsaciones será, aproximadamente, $2{,}58 \times 10^9$; eso es, 2.580 millones.
5. Un año luz es $9{,}45 \times 10^{12}$ kilómetros (eso es, cerca de 10 millones de millón).
6. Las células sanguíneas son 30 veces mayores que una bacteria.
7. El diámetro del «virus de la gripe» es 250 veces mayor que el del átomo de hidrógeno.
8. La pulga salta 70 metros.

SCI

1. $1{,}50 \times 10^1$ ó 15; **2**. 5,26; **3**. $1{,}18 \times 10^8$;
4. $3{,}32 \times 10^{-3}$.

Página 36

Estadísticas

La edad total de las 38 personas en el grupo es de 1.246 años. La media es de 32,8 años.

Medias y estadísticas

Para la 1.ª, el sumatorio (Σ) es 594 y la media (x) es 54. La desviación standard (σ) es 5,7. Esto es una desviación standard muy pequeña, porque todos los números están próximos a la media. Están todos entre 46-65.

Para la 2.ª, el sumatorio es 552; la media, 55,2. La desviación standard es 42,1. Esta es una desviación mayor, porque los números están muy separados, entre 7 y 126.

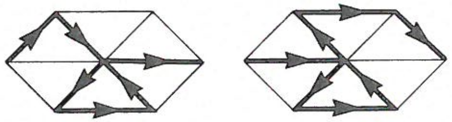
Página 37

Más estadísticas

1. La edad media está encima de los treinta, porque varias de las personas mayores de 30 son mucho más viejas (ejemplo: 93, 66, 64), y estos números altos hacen que la media crezca.
2. El porcentaje de personas sobre los sesenta es de 10,5%, y el porcentaje por debajo de los veinte, de un 29%.
3. Juzgando por este ejemplo, el 0,11 o 11% de los programas deberían de ser para niños menores de diez.

Laberinto decimal

Aquí hay dos rutas a través del laberinto.

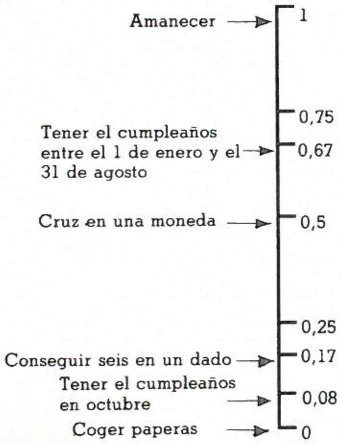


Página 38

Probable o poco probable

La probabilidad de escoger un diamante es de $^{13}/_{52}$, que es 0,25 ó 1 entre 4.

Escala de probabilidades



Página 39

Ases

La probabilidad de conseguir cuatro ases es de $3{,}69 \times 10^{-6}$; eso es, menos de cuatro entre un millón.

Factoriales

6! es 720.
Las operaciones $^4/_{52} \times ^3/_{51} \times ^2/_{50} \times ^1/_{49}$ y $\frac{4! \times 48!}{52}$ es lo mismo que: 4 × 3 × 2 × 1 es la misma base, porque 4! y 52 × 51 × 50 × 49 es lo mismo que $\frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48!}{48!}$ que es $^{52!}/_{48!}$.
Pero 52! es un número enorme. Es más de 8×10^{67}. Este es un número mucho más grande que segundos han pasado desde la creación del mundo.

Sumando probabilidades

La probabilidad de que el aterrizaje vaya mal es 0,250 238 (eso es, $^1/_5 + ^1/_{35} + ^1/_{60} + ^1/_{200}$), que está justo fuera del margen de seguridad.

Página 40

Rescate en la mina

El túnel de aire debe ser cavado con un ángulo de 32°. La operación que tienes que hacer es la siguiente:
$^{80}/_{130} = 0{,}615$ Esta es la tangente del ángulo A. Presionando la inversa, luego la tangente obtendrás el valor del ángulo A (31,6°).

Trigonometría

La tangente de 29° debe ser ligeramente superior a 0,5317.

Senos y cosenos

El seno de 28° es 0,469, y el coseno es 0,883. Tus soluciones puede que no sean exactamente iguales, pero deberán ser muy próximas.

Página 41

Problema de la torre

La torre tiene 25,6 metros de alto. Esta es la forma de calcularlo.

$$\frac{\text{Altura de la torre}}{20°} = \tan 52°$$

Altura de la torre = tan 52° × 20.

Alarma: cometa

El cometa no colisionará con la Tierra. Pasará a una distancia de 105 km. Esta es la forma de calcularlo:

$$\text{Seno } 2° = \frac{d}{6.400 + 180.000}$$

d = sen 2° × 186.400 = 6.505. El radio de la Tierra es 6.400 km., por lo que la distancia del cometa a la Tierra será 6.505—6.400 = 105 km.

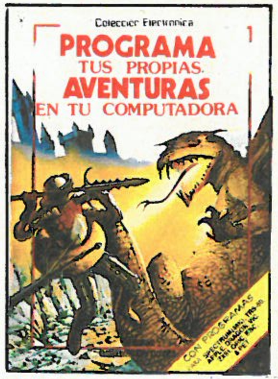
Trigonometría

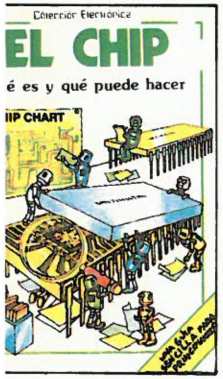
En el primer triángulo el lado b es 4,2 m. y el lado c es 6,5 m. En el segundo triángulo el ángulo x es 58° y el ángulo y es 32°.

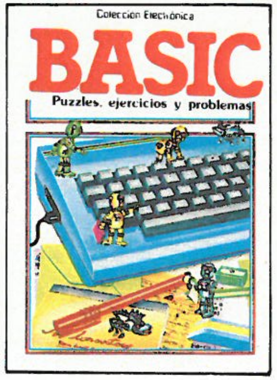
Indice

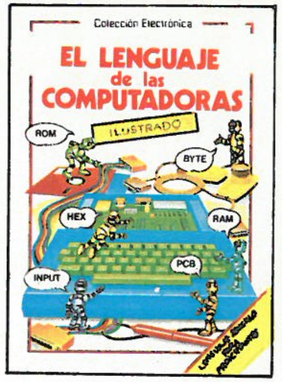
Impreso en España - Printed in Spain. MELSA-Pinto-MADRID.
ISBN: 84–7374–135–8
Depósito legal: M–16852–1985

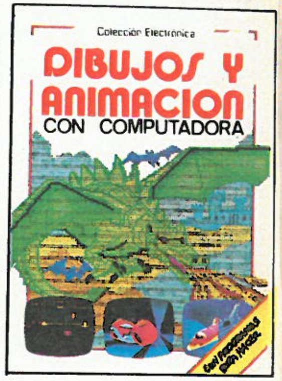
Colección Electrónica

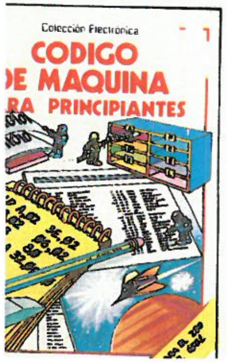












DISTRIBUIDOR
EXCLUSIVO
PARA
ESPAÑA
COMERCIAL DE
SM
Ediciones
cesma, s.a.
Aguacate, 25 - MADRID-25

Colección Electrónica

CALCULOS Y HABILIDADES

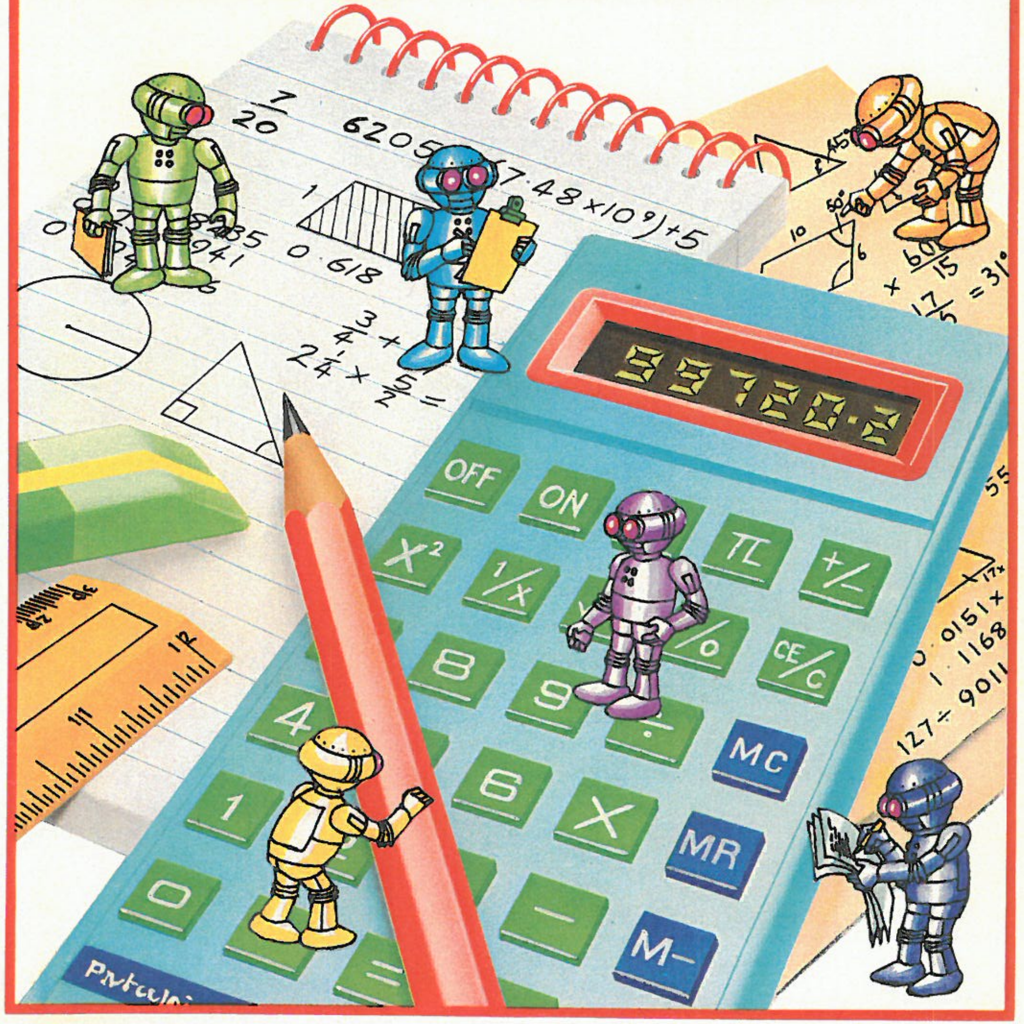
+ − × ÷

PLESA - SM

Colección Electrónica

CALCULOS Y HABILIDADES

con calculadoras



Ediciones
Plesa
SM